# 極限　演習プリント　No.3

１．［クリアー数学Ⅲ 問題96］

次の等式が成り立つように，定数 $a$，$b$ の値を定めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-2}=1$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$ …… ① が成り立つとする。

$\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$

よって，$1+a+b=0$ となり　$b=-(a+1)$ …… ②

このとき
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2$$

$a+2=3$ のとき ① が成り立つから　$a=1$

このとき ② から　$b=-2$

したがって　$a=1$，$b=-2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-2}=1$ …… ① が成り立つとする。

$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to2}(a\sqrt{x+3}-b)=0$

よって，$\sqrt{5}a-b=0$ となり　$b=\sqrt{5}a$ …… ②

このとき
$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x+3}-\sqrt{5})}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a\{(x+3)-5\}}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}=\frac{a}{2\sqrt{5}}$$

$\dfrac{a}{2\sqrt{5}}=1$ のとき ① が成り立つから　$a=2\sqrt{5}$

このとき ② から　$b=10$

したがって　$a=2\sqrt{5}$，$b=10$

２．［クリアー数学Ⅲ 問題103］

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^3}$

(1) $0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq1$ であるから
$$0\leqq\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|=|x^2|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq x^2$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

(2) $0\leqq|\sin x|\leqq1$ であるから，$x\fallingdotseq0$ のとき
$$0\leqq\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{|\sin x|}{|x|}\leqq\frac{1}{|x|}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

(3) $-1\leqq\cos x\leqq1$ であるから　$0\leqq1-\cos x\leqq2$

よって，$x>0$ のとき　$0\leqq\dfrac{1-\cos x}{x^3}\leqq\dfrac{2}{x^3}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^3}=0$

３．［クリアー数学Ⅲ 問題104］

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$

(1)
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cos x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2\cos x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\right\}$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$$

(2)
$$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{\sin x}\cdot2(1+\cos x)\right\}=1\cdot2(1+1)=4$$

(3)
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos3x)(1+\cos3x)}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^23x}{x^2(1+\cos3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^23x}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos3x}\right\}=1^2\cdot\frac{9}{1+1}=\frac{9}{2}$$

４．［クリアー数学Ⅲ 問題106］

等式 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{1}{2}$ が成り立つように，定数 $a$，$b$ の値を定めよ。

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{1}{2}$ ……① が成り立つとする。

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$

よって，$\dfrac{\pi}{2}a+b=0$ となり　$b=-\dfrac{\pi}{2}a$ ……②

このとき　$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$$

$x-\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\theta\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\lim_{\theta\to0}\frac{a\theta}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{\theta\to0}\frac{a\theta}{-\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left\{(-a)\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}=(-a)\cdot1=-a$$

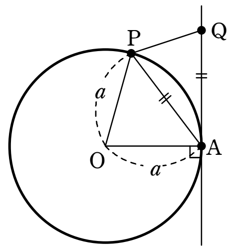
$-a=\dfrac{1}{2}$ のとき ① が成り立つから　$a=-\dfrac{1}{2}$

このとき ② から　$b=\dfrac{\pi}{4}$

したがって　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\pi}{4}$

５．［クリアー数学Ⅲ 問題108］

半径 $a$ の円Oの周上に動点Pと定点Aがある。Aにおける接線上に AQ＝AP であるような点Qを直線OAに関してPと同じ側にとる。PがAに限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}$ の極限を求めよ。




$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ とおくと　$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=a\theta$

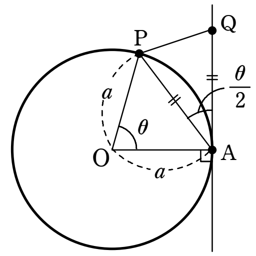
△OAPに着目すると　$\mathrm{AP}=2a\sin\dfrac{\theta}{2}$

また，接線と弦の作る角の性質から

$$\angle\mathrm{PAQ}=\left(\overset{\frown}{\mathrm{AP}}\text{の円周角}\right)=\frac{\theta}{2}$$

△APQは二等辺三角形であるから

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AP}\sin\frac{\theta}{4}=4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}$$




PがAに限りなく近づくとき，$\theta\longrightarrow+0$ であるから，求める極限は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}}{(a\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{4}{a}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2a}$$

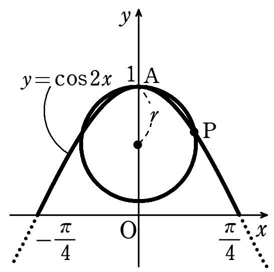
６．［クリアー数学Ⅲ 問題109］

曲線 $y=\cos2x$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上の動点PとA(0，1)を通り $y$ 軸上に中心をもつ円の半径を $r$ とする。PがAに限りなく近づくとき，$r$ はどんな値に近づくか。

P($x$，$\cos2x$)とおく。

曲線 $y=\cos2x$ は $y$ 軸に関して対称であるから，

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の場合を考えれば十分である。




2点A，Pを通り $y$ 軸上に中心をもつ半径 $r$ の円の中心の座標は　(0，$1-r$)

よって，その方程式は

$$x^2+\{y-(1-r)\}^2=r^2$$

点Pがこの円上にあるから

$$x^2+\{\cos2x-(1-r)\}^2=r^2$$

整理すると　$2(1-\cos2x)r=x^2+(1-\cos2x)^2$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$1-\cos2x\neq0$ であるから

$$r=\frac{x^2+(1-\cos2x)^2}{2(1-\cos2x)}=\frac{x^2}{2(1-\cos2x)}+\frac{1-\cos2x}{2}$$

$$=\frac{x^2}{2\cdot2\sin^2x}+\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+\frac{1-\cos2x}{2}$$

PがAに限りなく近づくとき，$x\longrightarrow+0$ であり

$$\lim_{x\to+0}r=\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+\frac{1-\cos2x}{2}\right\}=\frac{1}{4}\cdot1^2+\frac{1-1}{2}=\frac{1}{4}$$

したがって，$r$ は $\dfrac{1}{4}$ に近づく。