極限

◎ 数列の極限

無限数列 $\{a_n\}$ において、 n を限りなく大きくするとき、 a_n が一定値 α に限りなく近づく、または、一致する場合、数列 $\{a_n\}$ は、「**α に収束する**」といい、α は数列 $\{a_n\}$ の「**極限値**」という。

このとき、「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$」や「$a_n \longrightarrow \alpha$」と書く。

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, ② $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, ③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ について、
①は、極限値が存在し、極限値 は α (or 極限は α) ← 収束
②は、極限値が存在しないが、極限は ∞ 。 ← 発散
③は、極限値が存在しないが、極限は $-\infty$ 。 ← 発散

補足

∞ は「正の無限大」、 $-\infty$ は「負の無限大」とよむ。

収束しないことを「**発散する**」という。上の①～③以外のとき、数列 $\{a_n\}$ は「**振動する**」といい、この場合、「極限はない」。

「振動」は発散の一種であり、一つに定まらないことだと思えばよい。

注意

「∞」は、限りなく大きいことを表す記号であり、数ではない。

つまり、∞ は数ではなく記号なので、「$\infty+\infty=\infty\,,\infty\times\infty=\infty$」などの記述は解答用紙に書かないようにしましょう。

（例）

(1) $\{a_n\}$ ： $-1\,,-4\,,-9\,,-16\,,-25\,,\cdots$ において、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$

(2) $\{a_n\}$ ： $1\,,\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{3}\,,\dfrac{1}{4}\,,\dfrac{1}{5}\,,\cdots$ において、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

(3) $\{a_n\}$ ： $\sin\pi\,,\sin2\pi\,,\sin3\pi\,,\cdots$ において、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0$

(4) $\{a_n\}$ ： $\cos\pi\,,\cos2\pi\,,\cos3\pi\,,\cdots$ において、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\cos n\pi=\begin{cases}-1 & (n\text{は奇数})\\ 1 & (n\text{は偶数})\end{cases}$ より、極限なし （振動する）

◎ 関数の極限

1．右側極限

$x>a$ の下で(x が a より大きい値をとりながら)、 x が限りなく a に近づくとき、

「$\displaystyle\lim_{x\to a+0}$」「$x\longrightarrow a+0$」と書く。

2．左側極限

$x<a$ の下で(x が a より小さい値をとりながら)、 x が限りなく a に近づくとき、

「$\displaystyle\lim_{x\to a-0}$」「$x\longrightarrow a-0$」と書く。

補足

0に近づく片側極限では、右側極限は「$\displaystyle\lim_{x\to+0}$」、左側極限は「$\displaystyle\lim_{x\to-0}$」と書く。

参考

「$x\longrightarrow a+0$」では、 x は a よりちょっぴり大きいと訳し、「$x\longrightarrow a-0$」では、x は a よりちょっぴり小さいと訳すのがオススメ。

3．関数の極限

「$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$」かつ「$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha$」 $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$

注意 α のところは「∞」や「$-\infty$」でも成り立つ。

また、右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と 左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ が一致しない とき、

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しない。

つまり、 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)\neq\lim_{x\to a-0} f(x)$ $\Rightarrow$ $[\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しない (極限なし)$]$