積分法　演習プリント　No.1　解答

１．［クリアー数学Ⅲ 問題254］

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[4]{x^3}-1)^2}{x}dx=\int\frac{\left(x^{\frac{3}{4}}-1\right)^2}{x}dx=\int\frac{x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}+1}{x}dx$

$\displaystyle=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+\log|x|+C$

$\displaystyle=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3}+\log x+C$

(2) $\displaystyle\int(2-\tan^2x)dx=\int\left\{2-\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)\right\}dx$

$\displaystyle=\int\left(3-\frac{1}{\cos^2x}\right)dx=3x-\tan x+C$

(3) $\displaystyle\int(7^x-3e^x)dx=\frac{7^x}{\log 7}-3e^x+C$

２．［クリアー数学Ⅲ 問題272］

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+3)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{3}(\log|x|-\log|x+3|)+C=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-9}=\int\frac{dx}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{6}(\log|x-3|-\log|x+3|)+C=\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\log|x-2|+\log|x+3|+C=\log|(x-2)(x+3)|+C$

３．［クリアー数学Ⅲ 問題259］

C は積分定数とする。

(1) $4-3x^2=u$ とおくと　$-6xdx=du$

$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{-6x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{6}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}}du$

$\displaystyle=-\frac{1}{6}\cdot 2u^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{4-3x^2}}{3}+C$

(2) $\cos x=u$ とおくと　$-\sin x\,dx=du$

$\displaystyle\int\cos^4x\sin x\,dx=-\int\cos^4x(-\sin x)dx$

$\displaystyle=-\int u^4du=-\frac{u^5}{5}+C=-\frac{\cos^5x}{5}+C$

(3) $\log x=u$ とおくと　$\displaystyle\frac{1}{x}dx=du$

$\displaystyle\int\frac{dx}{x\log x}=\int\frac{du}{u}=\log|u|+C=\log|\log x|+C$

４．［クリアー数学Ⅲ 問題262］

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int e^{-x^3}\cdot(-x^3)'dx=-\frac{e^{-x^3}}{3}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1-\sin x}dx=-\int\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}dx$

$=-\log|1-\sin x|+C$

$=-\log(1-\sin x)+C$

注意　$-1\leqq\sin x\leqq 1$ であるから　$1-\sin x\geqq 0$

また，分母$\fallingdotseq 0$ であるから　$1-\sin x\fallingdotseq 0$

したがって　$1-\sin x>0$

(3) $\displaystyle\int xe^{-2x}dx=\int x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'dx=-\frac{x}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$

$\displaystyle=-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C=-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C$

５．［クリアー数学Ⅲ 問題273］

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\cos^2 4x\,dx=\int\frac{1+\cos 8x}{2}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$

$\displaystyle=\frac{x}{2}+\frac{\sin 8x}{16}+C$

(2) $\displaystyle\int\sin^2\frac{x}{4}dx=\int\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-2\sin\frac{x}{2}\right)+C=\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+C$

(3) $\displaystyle\int\sin^2x\cos 2x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\cos 2x\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos^2 2x)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\left(\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4}\right)+C$

$\displaystyle=-\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{16}+C$

(4) $\displaystyle\int\sin x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\{\sin 4x+\sin(-2x)\}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int(\sin 4x-\sin 2x)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 4x}{4}+\frac{\cos 2x}{2}\right)+C$

$\displaystyle=-\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{4}+C$

(5) $\displaystyle\int\sin 2x\sin 4x\,dx=-\frac{1}{2}\int(\cos 6x-\cos 2x)dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6}-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$

$\displaystyle=-\frac{\sin 6x}{12}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

６．［クリアー数学Ⅲ 問題279］

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=\int(e^x)'\sin x\,dx$

$\displaystyle=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int(e^x)'\cos x\,dx$

$\displaystyle=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$

$\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$ について整理すると

$\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

(2) $\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx=\int(e^x)'\cos 2x\,dx$

$\displaystyle=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x\,dx$

$\displaystyle=e^x\cos 2x+2\int(e^x)'\sin 2x\,dx$

$\displaystyle=e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x-4\int e^x\cos 2x\,dx$

$\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx$ について整理すると

$\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx=\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C$