

指数関数 基本事項

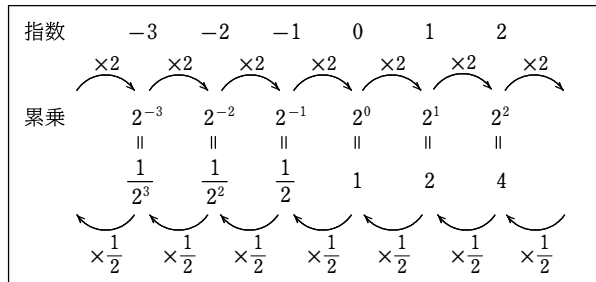
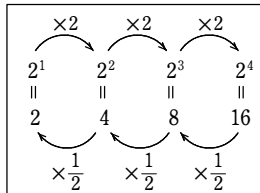
◎ 指数の0や負の整数への拡張

指数 n が0や負の整数のとき、累乗 a^n を考えてみよう。

たとえば、 n が正の整数のとき、

2^n の値は指数 n が1増えるごとに2倍になる。

逆に、指数 n が1減るごとに $\frac{1}{2}$ 倍になる。



一般に、指数が0や負の整数の場合の累乗を、次のように定める。

指数が0や負の整数の場合の累乗

$a \neq 0$ で、 n が正の整数のとき $a^0 = 1, a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

◎ 累乗根

n を正の整数とすると、 n 乗すると a になる数、すなわち $x^n = a$ となる数 x を、 a の n 乗根 という。例えば

$2^4 = 16, (-2)^4 = 16$ であるから、2 と -2 は16の4乗根

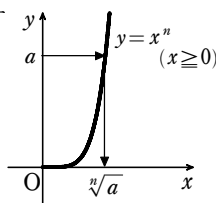
$(-3)^5 = -243$ であるから、 -3 は -243 の5乗根 である。

以下では、正の数 a の n 乗根のうち、正であるものについて考える。

右の図からわかるように、正の数 a に対して、 $x^n = a$ を満たす正の数 x がただ1つ定まる。これを $\sqrt[n]{a}$ で表す。

また、 $\sqrt[n]{0} = 0$ である。

【注意】 $\sqrt[n]{a}$ はこれまで通り \sqrt{a} で表す。



$a > 0, n$ が正の整数のとき、次のことが成り立つ。

$$\sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a$$

平方根の場合と同様に、累乗根について次のことが成り立つ。

累乗根の性質

$a > 0, b > 0$ で、 m, n を正の整数とする。

- 1 $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- 2 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- 3 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- 4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

◎ 指数の有理数への拡張

正の数 a に対して、指数が有理数のときも指数法則 $(a^x)^y = a^{xy}$ が成り立つ。

$$(a^{\frac{n}{m}})^m = a^n \text{ と } (\sqrt[m]{a^n})^m = a^n \text{ であることから、 } a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \text{ である。}$$

そこで、指数が有理数の場合の累乗を、次のように定める。

指数が有理数の場合の累乗

$a > 0$ で、 m, n を正の整数、 r を正の有理数とする。

1. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$ 特 に $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
2. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

一般に、次の指数法則が成り立つ。

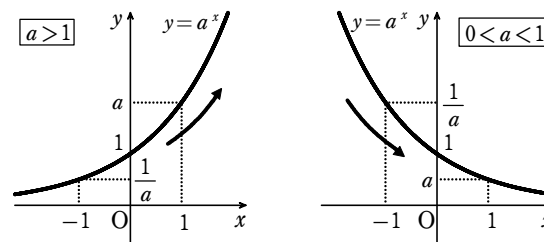
指数法則

$a > 0, b > 0$ で、 x, y が有理数のとき

1. $a^x \times a^y = a^{x+y}$
2. $a^x \div a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

◎ 指数関数のグラフ

一般に、指数関数 $y = a^x$ のグラフは、次のようになる。



- 1 グラフは x 軸を漸近線とし、点 $(0, 1), (1, a)$ を通る。
- 2 グラフは、 $a > 1$ のとき右上がり、 $0 < a < 1$ のとき右下がりである。

グラフからわかるように、指数関数 $y = a^x$ には、次の性質がある。

指数関数 $y = a^x$ の性質

- 1 定義域は実数全体、値域は正の数全体である。
- 2 $a > 1$ のとき x の値が増加すると y の値も増加する。

$$p < q \iff a^p < a^q$$

$0 < a < 1$ のとき x の値が増加すると y の値は減少する。

$$p < q \iff a^p > a^q$$

【注意】 $a > 0, a \neq 1$ のとき「 $p = q \iff a^p = a^q$ 」が成り立つ。