極限　演習プリント　No.2　解答

1．［クリアー数学Ⅲ 問題67］
次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot13}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{27}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots\cdots$

(4) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{12}+\cdots\cdots+\dfrac{2n-1}{4n}+\cdots\cdots$

(1) 第 n 項までの部分和を S_n とする。

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

であるから

$$S_n=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{4}$

(2) 第 n 項を a_n とすると

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}$$
$$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{(n+2)-n}=\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\}$$
$$=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，この無限級数は発散する。

(3) 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{2}$

別解　与式 $\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数で，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

よって，与えられた無限級数は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(4) 第 n 項を a_n とすると，$a_n=\dfrac{2n-1}{4n}$ であり

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{4}=\frac{1}{2}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないから，この無限級数は発散する。

2．［クリアー数学Ⅲ 問題72］
次のものが収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。

(1) 無限数列 $\{(x^2-2)^n\}$　　(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-2)^n$

(1) この無限数列の公比は　x^2-2

よって，この無限数列が収束するための必要十分条件は　$-1<x^2-2\leqq1$

$-1<x^2-2$ から　$x^2-1>0$

よって　$x<-1,\ 1<x$　……①

$x^2-2\leqq1$ から　$x^2-3\leqq0$

よって　$-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$-\sqrt{3}\leqq x<-1,\ 1<x\leqq\sqrt{3}$

(2) この無限級数は初項，公比ともに x^2-2 の無限等比級数である。

よって，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x^2-2=0$ ……①　または　$|x^2-2|<1$ ……②

① のとき ② は成り立つから，② を満たす実数 x の値の範囲を求めればよい。

② から　$-1<x^2-2<1$

$-1<x^2-2$ から　$x^2-1>0$

よって　$x<-1,\ 1<x$　……③

$x^2-2<1$ から　$x^2-3<0$

よって　$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$　……④

③，④ の共通範囲を求めて　$-\sqrt{3}<x<-1,\ 1<x<\sqrt{3}$

極限　演習プリント　No.2　解答

３．［クリアー数学Ⅲ 問題74］

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos n\pi$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$

(1) $\cos\pi=-1$，$\cos 2\pi=1$，$\cos 3\pi=-1$，…… であるから

$$\cos n\pi=(-1)^n$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos n\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}$

(2) $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\sin\pi=0$，$\sin\frac{3}{2}\pi=-1$，$\sin 2\pi=0$，$\sin\frac{5}{2}\pi=1$，……

よって，k を自然数とすると，

$n=2k$ のとき　　$\sin\frac{n\pi}{2}=\sin k\pi=0$

$n=2k-1$ のとき　　$\sin\frac{n\pi}{2}=\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}=(-1)^{k-1}$

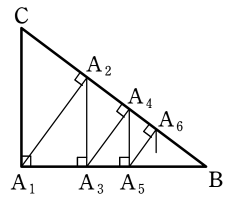
よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^7}-\cdots\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=-\frac{3}{10}$$

４．［クリアー数学Ⅲ 問題79］

$\angle A_1=90°$，$A_1B=4$，$BC=5$，$CA_1=3$ の直角三角形 A_1BC がある。A_1 から対辺 BC に下ろした垂線を A_1A_2，A_2 から A_1B に下ろした垂線を A_2A_3 とし，以下これを無限に続け，点 A_2，A_3，……，A_n，…… をとるとき，$\triangle A_1BA_2$，$\triangle A_2BA_3$，$\triangle A_3BA_4$，……，$\triangle A_nBA_{n+1}$，…… の面積の総和 S を求めよ。



$\triangle A_nBA_{n+1}$ の面積を S_n とする。

$\triangle A_nBA_{n+1}\backsim\triangle A_{n+1}BA_{n+2}$ で，相似比は

$$A_nB:A_{n+1}B=5:4$$

ゆえに　　$S_n:S_{n+1}=5^2:4^2$

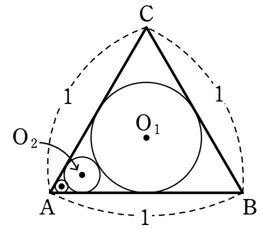
すなわち　　$S_{n+1}=\frac{16}{25}S_n$

また　　$S_1=\frac{16}{25}\triangle A_1BC=\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=\frac{96}{25}$

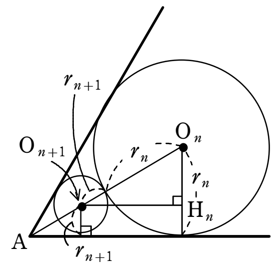
よって，求める面積の総和 S は，初項 $S_1=\frac{96}{25}$，公比 $\frac{16}{25}$ $\left(\left|\frac{16}{25}\right|<1\right)$ の無限等比級数の和で表され　　$S=\dfrac{\frac{96}{25}}{1-\frac{16}{25}}=\dfrac{32}{3}$

５．［クリアー数学Ⅲ 問題80］

1 辺が 1 の正三角形 ABC の内接円を O_1 とし，O_1 に外接し，辺 AB，AC に接する円を O_2，O_2 に外接し，辺 AB，AC に接する円を O_3 とし，以下同様にして，無限に円 O_1，O_2，O_3，……，O_n，…… を作るとき，すべての円の面積の和を求めよ。ただし，円 O_n の半径を r_n とするとき，$r_n>r_{n+1}$ とする。



円 O_n の半径を r_n，面積を S_n とし，点 O_{n+1} を通り辺 AB に平行な直線と点 O_n から AB に下ろした垂線との交点を H_n とする。



$\triangle O_nO_{n+1}H_n$ において，$\angle O_nO_{n+1}H_n=30°$ であるから　　$O_nO_{n+1}\sin 30°=O_nH_n$

すなわち　$(r_n+r_{n+1})\cdot\frac{1}{2}=r_n-r_{n+1}$

よって　　$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$

したがって，円 O_n と円 O_{n+1} の面積比は 9：1 であるから

$$S_{n+1}=\frac{1}{9}S_n$$

また，$r_1=\frac{1}{2}AB\tan 30°=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ であるから

$$S_1=\pi r_1{}^2=\frac{\pi}{12}$$

ゆえに，すべての円の面積の和は，初項 $\frac{\pi}{12}$，公比 $\frac{1}{9}$ $\left(\left|\frac{1}{9}\right|<1\right)$ の無限等比級数で表され，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{12}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{32}\pi$$