軌跡と領域のアプローチ

◎ 軌跡

軌跡 … 与えられた条件を満たす点が描く図形 (点の集合)

与えられた条件を満たす点Ｐの軌跡が図形Ｆであることを示すには、

１．条件を満たす任意の点Pは図形Ｆ上にある

２．図形Ｆ上の任意の点Pは、与えられた条件を満たす

★「１」を同値な式変形で示している場合は、「２」の逆の証明は不要

●軌跡の求め方
軌跡上の点(動点)を $(X\,,Y)$ とおき、条件を満たすような X, Y の関係式を求める

注１．求める軌跡上の点以外の動点は $(s\,,t)$ などとおくとよい

注２．パラメータ表示では、結果的にパラメータを消去することで、軌跡の方程式 (X, Y の関係式) を得られるが、式変形が同値変形になっていない場合は、軌跡の方程式が得られたに過ぎない。
（与えられた条件の必要条件を求めただけで、十分条件になっていない）

注３．図形的に「除外点」や「軌跡の限界(定義域)」が生じることがある
（内分点の軌跡、重心の軌跡など）

★同値変形になっていない可能性がある式変形

- 両辺を2乗する
- 文字を掛ける or 文字で割る
- 連立して文字を消去する (加減法 , 代入法)　など

◎ 逆像法

パラメータ表示された軌跡の問題や領域の最大･最小の根本的な考え方（原理）は、逆像法というものである。

例えば、 $\mathrm{P}(x\,,y)$ がパラメータ t によって、$x=f(t)\,,y=g(t)$ で定義されているとする。（ただし、 t は任意の実数）

「t の値を１つ定めれば、点Ｐの座標が１つ定まる」… (*)

しかし、任意の実数 t の値を用いて（代入して）、点P全体の集合を求めるのは困難である。（t の値は無限にあるので）

(*) を逆に考えれば、**軌跡上の点Pは、その点を作り出した実数 t が少なくとも一つ存在する**（この考え方が逆像法）。

そこで、 $x=f(t)\,,y=g(t)$ を同時に満たす実数 t が存在するような $x\,,y$ の条件を考えれば、その条件（ $x\,,y$ の関係式）が求める軌跡である。

●パラメータ表示された軌跡の問題のアプローチ
「パラメータの値（ t など）が存在するような点 $(x\,,y)$ 全体の集合」が求める軌跡である。

◎ 領域の最大･最小

●点 $(x\,,y)$ が領域 D 内を動くときの $f(x\,,y)$ の最大値･最小値の問題

$f(x\,,y)$ の値が k である

$\Longleftrightarrow$ 　$f(x\,,y)=k$ を満たす点 $(x\,,y)$ が領域 D 内に存在する

$\Longleftrightarrow$ 　$f(x\,,y)=k$ と領域 D が共有点をもつ

★ 領域の最大･最小は k とおく。ぶつかり始め終わりが最大･最小。

($f(x\,,y)=k$ と領域 D が共有点をもつような k の最大値･最小値を求める)

◎ 連立方程式の同値性

１．加減法の原理

$$\begin{cases} f(x\,,y)=0 \\ g(x\,,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} af(x\,,y)+b\cdot g(x\,,y)=0 \\ f(x\,,y)=0\ (or\ g(x\,,y)=0) \end{cases} \quad \text{(ただし、}(a\,,b)\fallingdotseq(0\,,0)\text{)}$$

２．代入法の原理

$$\begin{cases} f(x\,,y)=0 \\ y=g(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x\,,g(x))=0 \\ y=g(x) \end{cases}$$

←代入する方を残す