極限　演習プリント　No.1　解答

１．［クリアー数学Ⅲ 問題48］

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n+1}{n+1}-3n\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-n)$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n}}$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{-1}{1+0}=-1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n+1}{n+1}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{-2+0}{1+0}=-2$

(3) $\displaystyle\sqrt{n^2+2}-n=\frac{(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{(n^2+2)-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$

(4) $\displaystyle\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})=\frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{n+1}\{(n+2)-(n-1)\}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

$\displaystyle=\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$\displaystyle=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1-0}=1$

(6) $\displaystyle\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}\times\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}}$

$\displaystyle=\frac{\{(n+5)-(n+2)\}(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{\{(n+3)-(n+1)\}(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2})}$

$\displaystyle=\frac{3(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{2(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2})}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{2(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}$

$\displaystyle=\frac{3(1+1)}{2(1+1)}=\frac{3}{2}$

２．［クリアー数学Ⅲ 問題47］

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}$　(θ は定数)

(1) $\displaystyle -1\leqq\cos\frac{n\pi}{4}\leqq 1$ であるから　$\displaystyle -\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0$

(2) $0\leqq\sin^2 n\theta\leqq 1$ であるから　$\displaystyle 0\leqq\frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}\leqq\frac{1}{n^2+1}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}=0$

極限　演習プリント　No.1　解答

３．［クリアー数学Ⅲ 問題55］

数列 $\left\{\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。

与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1<\dfrac{2x}{x-1}\leqq 1$

$-1<\dfrac{2x}{x-1}$ から　$\dfrac{3x-1}{x-1}>0$

両辺に $(x-1)^2$ (>0) を掛けて　$(3x-1)(x-1)>0$，$x\fallingdotseq 1$

よって　$x<\dfrac{1}{3}$，$1<x$　……①

$\dfrac{2x}{x-1}\leqq 1$ から　$\dfrac{x+1}{x-1}\leqq 0$

両辺に $(x-1)^2$ (>0) を掛けて　$(x+1)(x-1)\leqq 0$，$x\fallingdotseq 1$

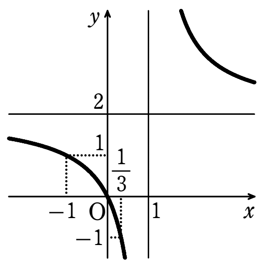
よって　$-1\leqq x<1$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$-1\leqq x<\dfrac{1}{3}$

別解　与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1<\dfrac{2x}{x-1}\leqq 1$

$\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$

したがって，$y=\dfrac{2x}{x-1}$ のグラフは，右の図のようになる。



よって，$-1<\dfrac{2x}{x-1}\leqq 1$ となる x の値の範囲は，グラフより　$-1\leqq x<\dfrac{1}{3}$

４．［クリアー数学Ⅲ 問題56］

r は定数とする。次の数列の極限を調べよ。

(1) $\left\{\dfrac{1}{1+r^{2n}}\right\}$　　(2) $\left\{\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$

(1) [1] $|r|<1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=0$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+r^{2n}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

[2] $|r|=1$ すなわち $r=\pm 1$ のとき

$r^{2n}=1$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+r^{2n}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

[3] $|r|>1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=\infty$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+r^{2n}}=0$

(2) [1] $|r|<1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=0$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\dfrac{0+0}{0+2}=0$

[2] $r=1$ のとき

$r^n=1$，$r^{2n}=1$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\dfrac{1+1}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

[3] $r=-1$ のとき

$$\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\dfrac{1+(-1)^n}{1+2}=\dfrac{1+(-1)^n}{3}$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$ は振動して，極限はない。

[4] $|r|>1$ のとき

$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{r^2}\right|<1$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(\dfrac{1}{r}\right)^n}{1+2\left(\dfrac{1}{r^2}\right)^n}=\dfrac{1+0}{1+2\cdot 0}=1$