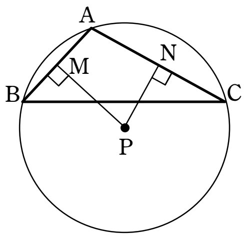
三角形の外心とベクトル　解答

1．［早稲田大］

△ABC において，AB＝2，AC＝3，BC＝4 とする。△ABC の外心を P，内心を I とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。また，IP の長さを求めよ。



$|\overrightarrow{BC}|=4$ であるから　$|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=16$

よって　$|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2=16$

$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$ であるから，$2^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+3^2=16$

ゆえに　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{3}{2}$

ここで，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ とおく。

辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{AC}$ であるから，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

したがって　$\left\{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\right\}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\left\{x\overrightarrow{AB}+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}\right\}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

すなわち　$2^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}y=0$，$-\dfrac{3}{2}x+3^2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=0$

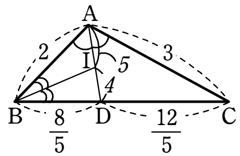
これを解くと　$x=\dfrac{11}{15}$，$y=\dfrac{28}{45}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{11}{15}\overrightarrow{AB}+\dfrac{28}{45}\overrightarrow{AC}$

次に，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする。

点 D は辺 BC を 2 : 3 に内分するから

$$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\ ,\quad BD=\frac{2}{5}BC=\frac{8}{5}$$



さらに，点 I は線分 AD を $2:\dfrac{8}{5}=5:4$ に内分するから

$$\overrightarrow{AI}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AD}=\frac{5}{9}\left(\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}\right)=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{9}$$

よって　$\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AI}=\dfrac{33\overrightarrow{AB}+28\overrightarrow{AC}}{45}-\dfrac{15\overrightarrow{AB}+10\overrightarrow{AC}}{45}=\dfrac{2}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

ゆえに　$|\overrightarrow{IP}|^2=\dfrac{4}{25}(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2)=\dfrac{4}{25}\left\{2^2+2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+3^2\right\}=\dfrac{8}{5}$

$|\overrightarrow{IP}|\geqq0$ であるから　$|\overrightarrow{IP}|=\sqrt{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

$\boxed{\text{別解}}$（前半の部分）　ポ 正射影を利用して，内積を求める

$|\overrightarrow{BC}|=4$ であるから　$|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=16$

よって　$|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2=16$

$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$ であるから，$2^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+3^2=16$

ゆえに　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{3}{2}$

ここで，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ とおく。

辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AM}=AM^2=1$ より，← ポ

$(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=1$

$x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$

$4x-\frac{3}{2}y=2$　　$\therefore\ 8x-3y=4$ …①

また，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AN}=AN^2=\frac{9}{4}$ より，← ポ

$(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{9}{4}$

$2x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2y|\overrightarrow{AC}|^2=9$

$-3x+18y=9$　　$\therefore\ x-6y=-3$ …②

①，② より，$x=\frac{11}{15}$，$y=\frac{28}{45}$

（以下略）

２．［慶応義塾大］

点 O を中心とする半径 1 の円に内接する三角形 ABC において $-5\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ が成り立っているとする。また直線 OA と直線 BC の交点を P とする。
このとき、線分 BC，OP の長さを求めよ。さらに三角形 ABC の面積を求めよ。

$-5\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ より，$7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=5\overrightarrow{OA}$ であるから

$$|7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}|=|5\overrightarrow{OA}|$$

両辺を 2 乗して展開すると　$49|\overrightarrow{OB}|^2+112\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+64|\overrightarrow{OC}|^2=25|\overrightarrow{OA}|^2$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ であるから　$49+112\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+64=25$

ゆえに　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\dfrac{11}{14}$

よって　$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2$

$$=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2=1-2\times\left(-\frac{11}{14}\right)+1=\frac{25}{7}$$

したがって　$|\overrightarrow{BC}|=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

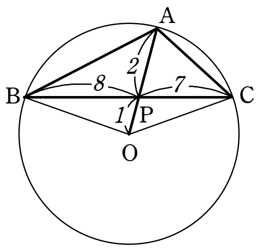
また　$\overrightarrow{OA}=\dfrac{7}{5}\overrightarrow{OB}+\dfrac{8}{5}\overrightarrow{OC}=3\times\dfrac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{8+7}$

よって，線分 OA を 1：2 に内分する点と線分 BC を 8：7 に内分する点は一致し，これが P である。

ゆえに　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{7}{15}\overrightarrow{OB}+\dfrac{8}{15}\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

よって　$OP=\dfrac{1}{3}OA=\dfrac{1}{3}$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ から，円と三角形 ABC は右の図のようになる。



よって，三角形 ABC の面積は

$$\triangle ABC=2\triangle OBC=\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$$

$$=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$