微分法　演習プリント　No.3　解答

１．［クリアー数学Ⅲ 問題184］

曲線 $xy=k$ $(k\neq 0)$ 上の任意の点 P における接線が，x 軸，y 軸と交わる点を，それぞれ Q，R とするとき，△OQR の面積は一定であることを示せ。ただし，O は原点とする。

$xy=k$ の両辺を x について微分すると　$y+x\dfrac{dy}{dx}=0$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，点 P における接線の方程式は

$$y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)\quad\cdots\cdots①$$

① に $y=0$ を代入して整理すると　$x=2x_1$

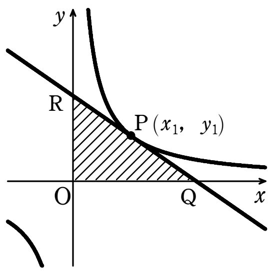
よって，点 Q の座標は　$(2x_1,\ 0)$

① に $x=0$ を代入して整理すると　$y=2y_1$

よって，点 R の座標は　$(0,\ 2y_1)$

また，点 P は曲線 $xy=k$ 上の点であるから

$x_1y_1=k$



ゆえに　$\triangle OQR=\dfrac{1}{2}|2x_1||2y_1|=2|x_1y_1|=2|k|$

したがって，△OQR の面積は一定である。

２．［クリアー数学Ⅲ 問題189］

平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

(1)　$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$

(2)　$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$a-b<b\log b-a\log a<b-a$

(1)　関数 $f(x)=\sin x$ はすべての実数 x について微分可能で

$f'(x)=\cos x$

区間 $[\alpha,\ \beta]$ において，平均値の定理を用いると

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(c)$，$\alpha<c<\beta$

すなわち　$\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=\cos c$，$\alpha<c<\beta$

を満たす実数 c が存在する。

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$0<c<\dfrac{\pi}{2}$

よって　$0<\cos c<1$

ゆえに　$\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}<1$

すなわち　$\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$

(2)　関数 $f(x)=x\log x$ は $x>0$ で微分可能で

$f'(x)=\log x+1$

区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$

すなわち　$\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}=\log c+1$，$a<c<b$

を満たす実数 c が存在する。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ であるから　$\dfrac{1}{e^2}<c<1$

したがって　$\log\dfrac{1}{e^2}<\log c<\log 1$

すなわち　$-2<\log c<0$

よって　$-1<\log c+1<1$

ゆえに　$-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

すなわち　$a-b<b\log b-a\log a<b-a$

３．［クリアー数学Ⅲ 問題197］

関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2-1}$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$x^2-1\neq 0$ であるから，定義域は　$x\neq\pm 1$

$$f'(x)=\frac{x^2-1-(x+a)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+2ax+1}{(x^2-1)^2}$$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，2 次方程式 $x^2+2ax+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，その解が 1 または -1 でないことである。

2 次方程式 $x^2+2ax+1=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-1$

よって，$f(x)$ が極値をもつための条件は

$a^2-1>0$　$\cdots\cdots①$　かつ

$1+2a+1\neq 0$　$\cdots\cdots②$　かつ

$1-2a+1\neq 0$　$\cdots\cdots③$

① から　$a<-1,\ 1<a$

このとき，②，③ を満たす。

よって，求める a の値の範囲は　$a<-1,\ 1<a$

微分法　演習プリント　No.3　解答

４．［クリアー数学Ⅲ 問題198］

関数 $f(x)=ax+\sin x$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$f'(x)=a+\cos x$

関数 $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，方程式 $f'(x)=0$ が実数解をもち，かつその解の前後で $f'(x)$ の符号が変わることである。

$f'(x)=0$ とすると　　$\cos x=-a$　……①

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから，① の実数解が存在するための条件は　　$-1\leqq -a\leqq 1$

すなわち　$-1\leqq a\leqq 1$

[1]　$a=-1$ のとき

常に $f'(x)\leqq 0$ であるから，極値をもたない。

[2]　$a=1$ のとき

常に $f'(x)\geqq 0$ であるから，極値をもたない。

[3]　$-1<a<1$ のとき

① の解が $0<x<\pi$ の範囲にあり，その値の前後で $f'(x)$ の符号が変わるから，極値をもつ。

以上から，求める a の値の範囲は　　$-1<a<1$

５．［クリアー数学Ⅲ 問題199］

関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+2}$ が $x=1$ で極小値 -1 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。

また，関数 $f(x)$ の極大値を求めよ。

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2+2)-(ax^2+bx+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=-\frac{bx^2-2(2a-1)x-2b}{(x^2+2)^2}$$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=1$ で極小値 -1 をとるならば

$f'(1)=0$，$f(1)=-1$

よって　　$-4a-b+2=0$，$\dfrac{a+b+1}{3}=-1$

すなわち　　$4a+b=2$，$a+b=-4$

これを解いて　　$a=2$，$b=-6$

逆に，$a=2$，$b=-6$ のとき　　$f(x)=\dfrac{2x^2-6x+1}{x^2+2}$，$f'(x)=\dfrac{6(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{7}{2}$	↘	極小 -1	↗

よって，$f(x)$ は $x=1$ で極小値 -1 をとり，条件を満たす。

したがって　　$a=2$，$b=-6$

また，$f(x)$ は $x=-2$ で極大値 $\dfrac{7}{2}$ をとる。

６．［クリアー数学Ⅲ 問題204］

関数 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

$a=0$ のときは $f(x)=0$ となり，最大値が $\sqrt{3}$ となることはない。

よって，$a\neq 0$ である。

$$f'(x)=a\cdot\frac{\cos x\cdot(\cos x+2)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x+2)^2}$$
$$=\frac{a(\cos^2 x+2\cos x+\sin^2 x)}{(\cos x+2)^2}$$
$$=\frac{a(2\cos x+1)}{(\cos x+2)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0<x<\pi$ の範囲でこれを解くと　　$x=\dfrac{2}{3}\pi$

[1]　$a>0$ のとき，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

ゆえに，最大値は　　$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{-\frac{1}{2}+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

条件から　　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$

したがって　　$a=3$

これは $a>0$ を満たす。

[2]　$a<0$ のとき，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	0

このとき，最大値は　　$f(0)=f(\pi)=0$

よって，不適である。

[1]，[2] から　　$a=3$