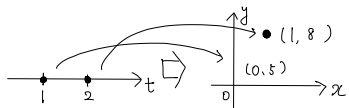


パラメータ表示の軌跡と逆像法

問題1  $t$  が実数値をとって変化するとき、点  $(t-1, 3t+2)$  はどんな図形上を動くか。

考え方



$t$  を1つ決めると、点も1つ定まるが、任意の実数  $t$  を代入して、すべての点を求めるのは困難である。そこで、軌跡上の点  $(x, y)$  は、その点を作り出す実数  $t$  が存在するので、実数  $t$  が存在するための条件で、 $x, y$  の関係式が求まる。

具体化

点  $(-2, -1)$  は求める軌跡上にあるか。

$$\begin{cases} t-1 = -2 \dots ① \\ 3t+2 = -1 \dots ② \end{cases} \Leftrightarrow t = -1 \quad \begin{matrix} t = -1 \text{ が } ① \text{ と } ② \text{ の} \\ \text{共通解となっている} \end{matrix}$$

①, ② を同時にみたす実数  $t$  が存在するので、

点  $(-2, -1)$  は求める軌跡上の点である。

点  $(-4, -3)$  は求める軌跡上にあるか。

$$\begin{cases} t-1 = -4 \dots ③ \\ 3t+2 = -3 \dots ④ \end{cases}, \quad ③ \Leftrightarrow t = -3, \quad ④ \Leftrightarrow t = -\frac{5}{3}$$

③, ④ を同時にみたす実数  $t$  が存在しないので、③と④は共通解をもたない。  
点  $(-4, -3)$  は求める軌跡上の点ではない。

解答 求める軌跡上の点を  $(X, Y)$  とおく。

$$\begin{cases} X = t-1 \\ Y = 3t+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = X+1 \dots ① \\ Y = 3X+5 \dots ② \end{cases} \left( \Leftrightarrow \begin{cases} t = X+1 \dots ① \\ Y = 3X+5 \dots ③ \end{cases} \right)$$

①, ② を同時にみたす実数  $t$  が存在するような点  $(X, Y)$  の条件は、

$$Y = 3(X+1) + 2 \quad \therefore Y = 3X + 5$$

よって、点  $(t-1, 3t+2)$  は直線  $y = 3x + 5$  上を動く。

少し固い表現であり、無理にこんな表現で書かなくてもよいが、ここが根本(原理)

解説

「①かつ②」 $\Leftrightarrow$ 「①かつ③」より、③をみたす  $X, Y$  のとき、①により、実数  $t$  が存在する。

もっと詳しく書くと

求める軌跡を  $L$  とすると

$$(X, Y) \in L$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = t-1 \\ Y = 3t+2 \end{cases} \text{ をみたす実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = X+1 \\ Y = 3t+2 \end{cases} \text{ をみたす実数 } t \text{ が存在する}$$

↑ ここが戻りるのが「分かりにくい」

$$\Leftrightarrow Y = 3(X+1) + 2 \quad \text{実数 } t \text{ が1つでもあれば「いいので」}$$

(都合良く見つけてくれば「いい」)

$$\Leftrightarrow Y = 3X + 5$$

$X+1$  という値を  $t$  として「選べば」

「↑」は成り立つ

問題2  $t$  が実数値をとって変化するとき、点  $(t^2+1, 2t^4-3t^2)$  はどんな図形上を動くか。

解答

求める軌跡上の点を  $(X, Y)$  とおく。

$$\begin{cases} X = t^2+1 \\ Y = 2t^4-3t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = X-1 \dots ① \\ Y = 2(X-1)^2 - 3(X-1) \dots ② \end{cases}$$

①, ② を同時にみたす実数  $t$  が存在するような点  $(X, Y)$  の条件は、

$$\begin{cases} X-1 \geq 0 \dots ③ \\ Y = 2X^2 - 7X + 5 \end{cases}$$

$$③ \Leftrightarrow X \geq 1$$

よって、点  $(t^2+1, 2t^4-3t^2)$  は 放物線  $y = 2x^2 - 7x + 5$  ( $x \geq 1$ ) 上を動く。

少し固い表現であり、無理にこんな表現で書かなくてもよいが、ここが根本(原理)