

## ② 2変数の独立と従属

$x, y$  が  $x+y=1$  や  $x^2+y^2=4$  のような関係式を満たすとき、 $x$  (or  $y$ ) の値を決めると、 $y$  (or  $x$ ) の値がそれに従って定まる。

このような  $x, y$  を「**従属2変数**」とよぶことにする。

また、 $x, y$  が  $1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4$  のような関係式を満たすとき、

$x$  は、 $y$  の値に関わらず、 $1 \leq x \leq 3$  の範囲の値をとり、

$y$  は  $x$  の値に関わらず、 $2 \leq y \leq 4$  の範囲の値をとる。

このような  $x, y$  を「**独立2変数**」とよぶことにする。

## (ポイント)

$x, y$  が 従属2変数のときは、 $x, y$  の関係式を用いて、

$x, y$  のどちらかの文字を消去できないかを考えるとよい。

☆ (従属) 2変数関数の最大・最小はまず1変数化を考える

☆ 従属2変数では、隠れた文字の変域に注意する。

特に、(実数) $^2 \geq 0$  なので、2乗を含む条件式は要注意。

☆ 相加・相乗平均の関係の使える場面

1. 積が一定のときの和の最小値

2. 和が一定のときの積の最大値

特に、分数関数の最大・最小は、数Ⅲの「微分」を使わないと

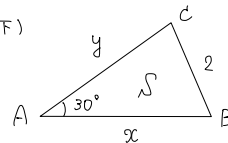
グラフが描けないため、積が一定になるような2数の和の形を作る。

## 3-2 (2)

(方法1)  $S$  を関数で表す

(方法2) 図形的に考察

(F)



$$S = \frac{1}{2}xy \sin 30^\circ = \frac{1}{4}xy$$

$xy$  は、ある一定値以下、つまり、 $xy \leq k$  (一定) の形を作れば、

$S \leq \frac{k}{4}$  (一定) の形ができる。

(考え方) 相加・相乗平均の関係は、

$$\underbrace{a+b}_{\text{和}} \geq 2\sqrt{\underbrace{ab}_{\text{積}}} \quad \text{で、和と積の形が含まれる}$$

## 解答

$AB = x, AC = y$  とおくと、

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}xy \sin 30^\circ = \frac{1}{4}xy$$

$\triangle ABC$  において、余弦定理より、

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 30^\circ = x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy \quad \dots \textcircled{1}$$

(ここで積  $xy$  の形にしたい)

ここで、 $x^2 > 0, y^2 > 0$  より、相加・相乗平均の関係から、

$$\underline{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = \underline{2xy} \quad (\because x > 0, y > 0)$$

$$\text{よって、} \underline{x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy} \geq \underline{2xy - \sqrt{3}xy}$$

$$\textcircled{1} \text{より、} 4 \geq (2 - \sqrt{3})xy$$

$$\therefore xy \leq 4(2 + \sqrt{3})$$

$$\therefore S \leq 2 + \sqrt{3}$$

等号成立条件は、 $x^2 = y^2$  より、 $x = y$  である。

したがって、 $S$  は、 $x = y$  のとき、最大値  $2 + \sqrt{3}$  をとる。