Σ計算の基本問題　見本

1．次の式を和の形で書け。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}4k^2$　　(3) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$

2．次の式を和の記号 Σ を用いて書け。

(1) $3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$　　(2) $3+6+9+12+15+18$

3．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(8k+3)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}k(k+5)$

4．次の和を求めよ。

(1) $1\cdot1+3\cdot4+5\cdot7+\cdots\cdots+(2n-1)(3n-2)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}6\cdot3^{k-1}$

1．（アイテム）$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

k=1, 2, 3, …, n を代入して、足し合わせる

解答

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=\underline{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}4k^2=\underline{4\cdot1^2+4\cdot2^2+4\cdot3^2+\cdots+4n^2}$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}=\underline{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}$

2．（方針）一般項をnの式で表すとどうなるかを考える。

（下書き）

(1) $\{a_n\}$：$\underset{a_1}{3^2}, \underset{a_2}{4^2}, \underset{a_3}{5^2}, \underset{a_4}{6^2}, \underset{a_5}{7^2}, \underset{a_6}{8^2}$（項数6）

一般項は、$a_n=(n+2)^2$

(2) $\{a_n\}$：$\underset{a_1}{3}, \underset{a_2}{6}, \underset{a_3}{9}, \underset{a_4}{12}, \underset{a_5}{15}, \underset{a_6}{18}$（項数6）

一般項は、$a_n=3n$

解答

(1) $3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2=\underline{\sum_{k=1}^{6}(k+2)^2}$

（別解）$3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2=\underline{\sum_{k=3}^{8}k^2}$

(2) $3+6+9+12+15+16=\underline{\sum_{k=1}^{6}3k}$

3．（アイテム）

1．$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$

2．$\sum_{k=1}^{n}c=cn$，$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

解答

(1) $\sum_{k=1}^{n}(8k+3)$

$=8\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$=8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$

$=n\{4(n+1)+3\}$

$=\underline{n(4n+7)}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k(k+5)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+5k)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\underbrace{5\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{15}{6}}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+15\}$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+16)$

$=\underline{\frac{1}{3}n(n+1)(n+8)}$

4．（下書き）

(1) $\underbrace{1\cdot1}_{a_1}+\underbrace{3\cdot4}_{a_2}+\underbrace{5\cdot7}_{a_3}+\cdots\cdots+\underbrace{(2n-1)(3n-2)}_{a_n\text{（一般項）}}$ ←項数n

(2) $r^{(n\text{の1次式})}$ や $r^{(n\text{の1次式})}$ は等比数列の一般項

$\sum_{k=1}^{n}$ ← k=1〜n なので、項数はn

（ポイント）(1) 一般項が2次式なので、Σ公式で計算

(2) 初項，公比，項数を把握して、等比数列の和の公式で計算

解答

(1) $1\cdot1+3\cdot4+5\cdot7+\cdots\cdots+(2n-1)(3n-2)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(3k-2)$

$=\sum_{k=1}^{n}(6k^2-7k+2)$

$=6\sum_{k=1}^{n}k^2-7\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$

$=6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-7\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$

$=n(n+1)(2n+1)-\frac{7}{2}n(n+1)+2n$

$=\frac{1}{2}n\{2(n+1)(2n+1)-7(n+1)+4\}$

$=\underline{\frac{1}{2}n(4n^2-n-1)}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}6\cdot3^{k-1}$ ← ar^{k-1} の形なので、初項6，公比3

$=\frac{6(3^n-1)}{3-1}$

$=\underline{3(3^n-1)}$