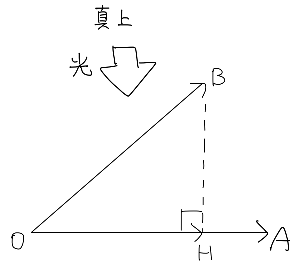
正射影ベクトルとその長さ

◎ 正射影とは.



$(\overrightarrow{OA}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{OB}\neq\vec{0})$

Bから. 直線OAに下ろした垂線の足をHとする。

$\overrightarrow{OH}$を$\overrightarrow{OB}$の$\overrightarrow{OA}$への「正射影ベクトル」という。

イメージとして. $\overrightarrow{OA}$を地面と思えば、真上から. 光を当てると.

$\overrightarrow{OH}$は$\overrightarrow{OB}$の影である。

◎ 内積と正射影ベクトルの長さ

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$のなす角をθとする。

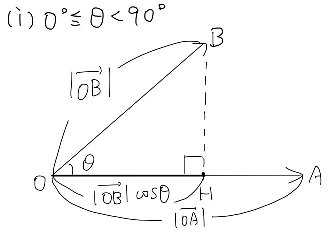
$\boxed{\text{内積の定義}:\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta}$

$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$を$|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$と見て、$|\overrightarrow{OA}|$を「地面の長さ」、

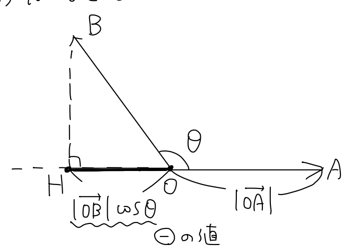
$|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$を「地面にできた影の長さ」と解釈するとよい。つまり、

$\boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\oplus\ \text{or}\ \ominus)\times(\text{地面の長さ})\times(\text{影の長さ})}$ となる。

(i) $0°\leqq\theta<90°$



(ii) $90°<\theta\leqq180°$



$0°\leqq\theta<90°$ ⇒ $|\overrightarrow{OB}|\cos\theta>0$であり、影$|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$は.
地面$|\overrightarrow{OA}|$の上にある。

$\theta=90°$ ⇒ $|\overrightarrow{OB}|\cos\theta=0$であり、影$|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$は、
点となり、点Oに一致する。

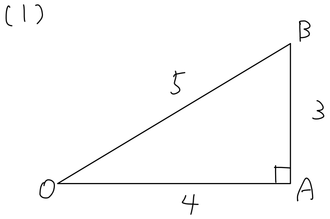
$90°<\theta\leqq180°$ ⇒ $|\overrightarrow{OB}|\cos\theta<0$であり、影$|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$は.
地面$|\overrightarrow{OA}|$の反対側の上にある。このとき、

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-(\text{地面の長さ})\times(\text{影の長さ})$

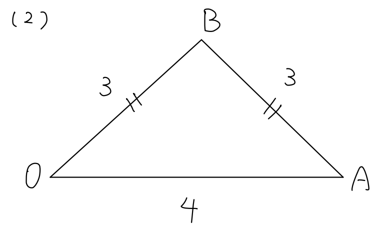
⊖をつけるのを忘れずに!!

$\boxed{\text{例題}}$ 内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$の値を求めよ。

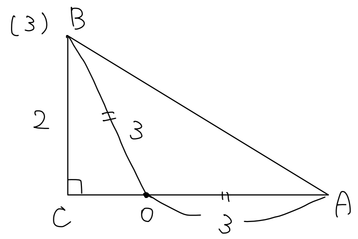
(1)



(2)



(3)



(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4\cdot4=\underline{16}$

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4\cdot2=\underline{8}$

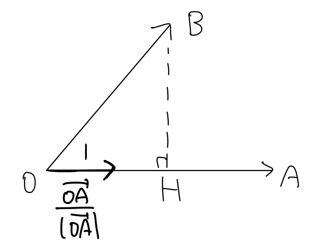
(3) $OC=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ より.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\underline{-3\sqrt{5}}$

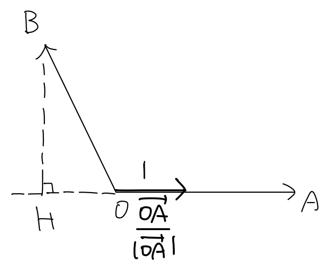
☆ 単位ベクトル$\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$と内積をとると、

符号つき(⊕,⊖)の正射影ベクトルの長さ(大きさ)が求まる。

(i) $0°\leqq\theta<90°$



(ii) $90°<\theta\leqq180°$



$\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}\cdot\overrightarrow{OB}=\underbrace{1}_{\text{地面の長さ}}\cdot\underbrace{OH}_{\text{影の長さ}}=\underline{OH}$

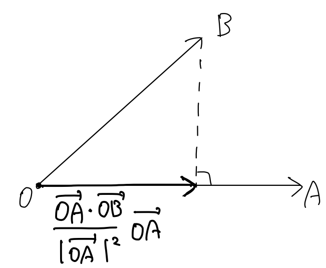
$\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}\cdot\overrightarrow{OB}=-1\cdot OH=\underline{-OH}$

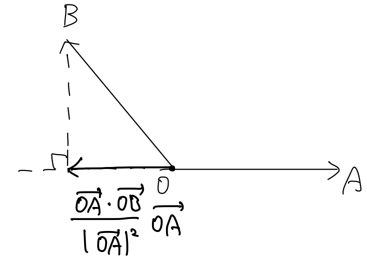
この知識は、三角形や四面体の高さを求めるときに
利用するとよい。直線や平面の法線ベクトルの
単位ベクトル方向に正射影したいベクトルと内積をとれば、
高さが求まる。このとき、内積の値が負のときは、
絶対値をとって正にする。

◎ 正射影ベクトル

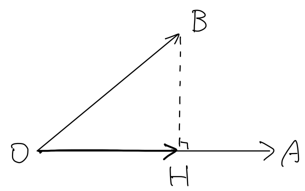
$\overrightarrow{OB}$の$\overrightarrow{OA}$への正射影ベクトルは、$\boxed{\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}}$である

($\overrightarrow{OA}$の$\overrightarrow{OB}$への正射影ベクトルは、$\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}$)





(証明)



Bから直線OAに下ろした垂線の足をHとすると、

$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}$とおける。

このとき、$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$である。

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OA}$より. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$なので.

$(k\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0 \iff k|\overrightarrow{OA}|^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ $\therefore\ k=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}$

よって. $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}$ ← 細かい記述を書かなければ
30秒くらいで導ける(もちろん.覚えてもよい)

正射影ベクトルの別の作り方として.単位ベクトル$\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$を利用する方法を紹介する

$\overrightarrow{OH}=\underbrace{\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}\cdot\overrightarrow{OB}\right)}_{\text{正射影ベクトルの長さ(符号つき)}}\times\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}$