②の補足プリント

第１２章　7−3　P.272

点 $(1, 3)$ を通る傾き m の直線 l と放物線 C：$y=x^2$ によって囲まれる領域の面積を S とする。S の最小値、およびそのときの m の値を求めよ。

ポイント

放物線と直線が2交点で交わり、囲まれる領域の面積は

$\frac{1}{6}$公式で立式する(求める)。

文字係数の2次方程式の2解は、α, β とおいて、解と係数の関係を利用。

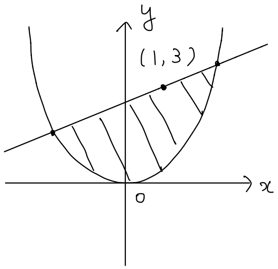
あるいは、α, β を判別式 D を用いて表すのがよい。

(因数分解できないときは、解の公式で解が少しごちゃつく)

解答　l の方程式は、

$$y = m(x-1)+3$$

$$\therefore y = mx - m + 3$$



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx - m + 3 \end{cases}$$ より、

$$x^2 - mx + m - 3 = 0 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の2解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと、解と係数の関係より、

$\alpha+\beta = m$，$\alpha\beta = m-3$ である。

よって、

$$S = \int_\alpha^\beta \{(mx-m+3) - x^2\}\,dx$$

$$= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで、$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$$= m^2 - 4(m-3)$$

$$= m^2 - 4m + 12$$

☆ $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$

差の2乗は、対称式!!

(てんてーは、和と差と積の関係と呼んでいます)

$\beta-\alpha>0$ より、$\beta-\alpha = \sqrt{m^2-4m+12}$

よって、$S = \frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2-4m+12}\right)^3$

$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+8}\right)^3$$ より、

S は、$\underline{m=2}$ のとき、$\underline{最小値\ \frac{8\sqrt{2}}{3}}$

別解　$(*)$ の後から…

$(*)$ の2解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと、

$\alpha = \dfrac{m-\sqrt{D}}{2}$，$\beta = \dfrac{m+\sqrt{D}}{2}$ である。

(ただし、$D = (-m)^2 - 4(m-3) = m^2 - 4m + 12$)

よって、$S = \int_\alpha^\beta \{(mx-m+3) - x^2\}\,dx$

$$= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\beta-\alpha = \frac{m+\sqrt{D}}{2} - \frac{m-\sqrt{D}}{2} = \sqrt{D}$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{D})^3$$ より、

D が最小のとき、S は最小となる。

したがって、

$D = (m-2)^2 + 8$ より、S は、$\underline{m=2}$ のとき、$\underline{最小値\ \frac{8\sqrt{2}}{3}}$