微分法　演習プリント　No.2　解答

１．［クリアー数学Ⅲ 問題169］

x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(1)　$x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{t^2}{1+t}$　　　(2)　$x=\cos t+t\sin t$，$y=\sin t-t\cos t$

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1\cdot(1+t)-t\cdot 1}{(1+t)^2}=\dfrac{1}{(1+t)^2}$，

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t(1+t)-t^2\cdot 1}{(1+t)^2}=\dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}}{\dfrac{1}{(1+t)^2}}=t^2+2t$

また　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}(t^2+2t)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

$=(2t+2)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{(1+t)^2}}=2(t+1)^3$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t+(\sin t+t\cos t)=t\cos t$，

$\dfrac{dy}{dt}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$

また　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}(\tan t)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

$=\dfrac{1}{\cos^2 t}\cdot\dfrac{1}{t\cos t}=\dfrac{1}{t\cos^3 t}$

２．［クリアー数学Ⅲ 例題32］

関数 $y=x^{2x}$ $(x>0)$ を微分せよ。

$x>0$ であるから　$x^{2x}>0$

$y=x^{2x}$ について，両辺の自然対数をとると　$\log y=2x\log x$

この両辺を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=2\cdot\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2(\log x+1)$

ゆえに　$y'=2y(\log x+1)=2x^{2x}(\log x+1)$

参考　このように，両辺の自然対数をとって微分する方法を，対数微分法という。

３．［クリアー数学Ⅲ 例題33］

関数 $f(x)=xe^x$ について，次のことを数学的帰納法で証明せよ。

$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$　……①

[1]　$n=1$ のとき

左辺 $=f'(x)=(xe^x)'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(x+1)e^x$，　右辺 $=(x+1)e^x$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $f^{(k)}(x)=(x+k)e^x$ が成り立つと仮定すると，

$n=k+1$ のとき

左辺 $=f^{(k+1)}(x)=\dfrac{d}{dx}f^{(k)}(x)=\dfrac{d}{dx}\{(x+k)e^x\}=1\cdot e^x+(x+k)\cdot e^x$

$=\{x+(k+1)\}e^x$

よって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

微分法　演習プリント　No.2　解答

4．［クリアー数学Ⅲ 問題178］

2つの曲線 $y=-\dfrac{2}{x}$，$y=\sqrt{x+a}$ が共有点をもち，その点において共通の接線をもつとき，定数 a の値を求めよ。

$f(x)=-\dfrac{2}{x}$，$g(x)=\sqrt{x+a}$ とすると　　$f'(x)=\dfrac{2}{x^2}$，$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}$

2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の接点の x 座標を t $(t\fallingdotseq 0,\ t+a>0)$ とする。

$x=t$ における2曲線の y 座標が等しいから　　$f(t)=g(t)$

すなわち　　$-\dfrac{2}{t}=\sqrt{t+a}$　……①

また，$x=t$ における2つの曲線の接線の傾きが等しいから　　$f'(t)=g'(t)$

すなわち　　$\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{t+a}}$　……②

①，② から　　$\dfrac{2}{t^2}=-\dfrac{t}{4}$　　　よって　　$t^3+8=0$

t は実数であるから　　$t=-2$　($t\fallingdotseq 0$ を満たす)

$t=-2$ を ① に代入すると　　$\sqrt{a-2}=1$

ゆえに　　$a-2=1$　　　よって　　$a=3$　　　これは，$t+a>0$ を満たす。

したがって　　$t=-2$，$a=3$

5．［クリアー数学Ⅲ 問題180］

$0<x<2\pi$ とする。2つの曲線 $y=2\cos x$，$y=a+\sin 2x$ が接するように，定数 a の値を定めよ。

$f(x)=2\cos x$，$g(x)=a+\sin 2x$ とおくと

$f'(x)=-2\sin x$，$g'(x)=2\cos 2x$

2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=\alpha$ $(0<\alpha<2\pi)$ で接するための条件は

$f(\alpha)=g(\alpha)$　かつ　$f'(\alpha)=g'(\alpha)$

すなわち　　$2\cos\alpha=a+\sin 2\alpha$　……①

$-2\sin\alpha=2\cos 2\alpha$　……②

② から　　$-2\sin\alpha=2(1-2\sin^2\alpha)$

整理して　　$2\sin^2\alpha-\sin\alpha-1=0$

よって　　$(\sin\alpha-1)(2\sin\alpha+1)=0$

ゆえに　　$\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，1

$0<\alpha<2\pi$ であるから　　$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$

① から　　$a=2\cos\alpha-\sin 2\alpha$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　のとき　　$a=2\cos\dfrac{\pi}{2}-\sin\pi=0$

$\alpha=\dfrac{7}{6}\pi$　のとき　　$a=2\cos\dfrac{7}{6}\pi-\sin\dfrac{7}{3}\pi=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\alpha=\dfrac{11}{6}\pi$ のとき　　$a=2\cos\dfrac{11}{6}\pi-\sin\dfrac{11}{3}\pi=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

したがって，求める a の値は　　$a=0$，$\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

6．［クリアー数学Ⅲ 問題182］

曲線 $y=xe^x$ に点 P$(a,\ 0)$ から接線が引けるような定数 a の値の範囲を求めよ。

接点の座標を $(t,\ te^t)$ とする。

$y=xe^x$ から　　$y'=(x+1)e^x$

よって，点 $(t,\ te^t)$ における接線の方程式は　　$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)$

この直線が点 P$(a,\ 0)$ を通るとき　　$-te^t=(t+1)e^t(a-t)$

$e^t>0$ であるから　　$-t=(t+1)(a-t)$

整理して　　$t^2-at-a=0$　……①

接線が引けるための条件は，t についての2次方程式 ① が実数解をもつことである。

① の判別式を D とすると　　$D=(-a)^2-4\cdot 1\cdot(-a)=a^2+4a$

$D\geqq 0$ より　　$a^2+4a\geqq 0$

これを解いて　　$a\leqq -4$，$0\leqq a$