通過領域の解法

1、逆像法

2、ファクシミリの原理

3、包絡線の利用

← 最後の欄に、具体例を用いて、1と2の説明を書いています。

1は、「解の配置問題」、2は「最大・最小問題」を解くことになる。

3は、包絡線と呼ばれる曲線の接線を包絡線上を滑らせて領域を図示する。

問題1 aが任意の実数をとるとき、直線 $l: y=ax-a+1$ が通過する領域Fを求めよ。

解説 通過領域の解法を知らなくても、lの定点を利用すれば解ける。今回の直線lは定点があるが、直線や曲線に必ずしも定点があるとは限らないので、「逆像法」でも解いてみる。

解答1 (定点を利用)

lは $y=(x-1)a+1$ より、aの値に関わらず、lは定点$(1,1)$を通る。

lの傾きはaであり、aは任意の実数値をとるので、lが通過する領域は $x\neq1$ である。

よって、領域Fは $x\neq1$で、点$(1,1)$を含む。

解答2 (逆像法を利用)

「点(X,Y)が領域F内にある」

$\Leftrightarrow$「$(X-1)a-Y+1=0$ …(*)をみたす実数aが存在する」…(ア)

よって、(ア)が成り立つようなX,Yの条件を求める。

(i) $X=1$のとき

$(X,Y)=(1,1)$のとき (*)をみたす実数aは任意に存在する。

(ii) $X\neq1$のとき

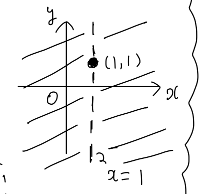
$a=\dfrac{Y-1}{X-1}$ は(*)をみたす。

(i),(ii)より、

$$F:\begin{cases} y=1 & (x=1)\\ x,y\text{は任意の実数} & (x\neq1)\end{cases}$$

つまり、領域Fは $x\neq1$で、点$(1,1)$を含む。

図示すると。



問題2 実数aが $-1\leqq a\leqq2$ で変化するとき、直線 $l: y=ax-a+1$ が通過する領域Fを図示せよ。

解答1 (逆像法を利用)

「点(X,Y)が領域F内にある」

$\Leftrightarrow$「$(X-1)a-Y+1=0$ …(*)をみたす実数aが $-1\leqq a\leqq2$ の範囲に存在する」…(ア)

よって、(ア)が成り立つようなX,Yの条件を求める。

(i) $X=1$のとき

$(X,Y)=(1,1)$のとき (*)をみたす実数aは $-1\leqq a\leqq2$ の範囲に任意に存在する。

(ii) $X\neq1$のとき。

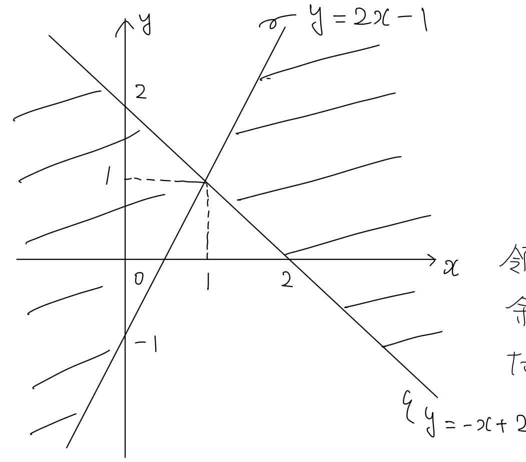
(*)より、$a=\dfrac{Y-1}{X-1}$ であり、$-1\leqq a\leqq2$ をみたすとき。

$$-1\leqq\frac{Y-1}{X-1}\leqq2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-X+2\leqq Y\leqq2X-1 & (X>1)\\ 2X-1\leqq Y\leqq-X+2 & (X<1)\end{cases}$$ である。

(i),(ii)より、

$$F:\begin{cases}-x+2\leqq y\leqq2x-1 & (x\geqq1)\\ 2x-1\leqq y\leqq-x+2 & (x<1)\end{cases}$$



領域Fは図の斜線部である。ただし、境界を含む。

解答2 (ファクシミリの原理を利用)

lは $y=(x-1)a+1$

$x=k$(定数)で固定して、yのとりうる範囲を求める。

$f(a)=(k-1)a+1$ とする。

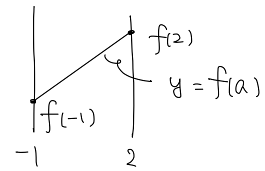
(i) $k=1$のとき。

$y=1$

(ii) $k>1$のとき。

$f(-1)\leqq y\leqq f(2)$

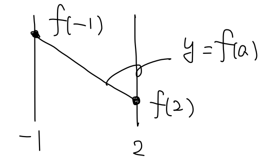
$\therefore -k+2\leqq y\leqq2k-1$



(iii) $k<1$のとき

$f(2)\leqq y\leqq f(-1)$

$\therefore 2k-1\leqq y\leqq-k+2$



(i)〜(iii)より、xを実数全体で動かすと、領域Fは以下のようになる。

$$F:\begin{cases}-x+2\leqq y\leqq2x-1 & (x\geqq1)\\ 2x-1\leqq y\leqq-x+2 & (x<1)\end{cases}$$

(図は解答1参照)

問題3 実数aが$a \geqq 1$で変化するとき、直線l：$y=ax-a^2+1$ 通過する領域Fを図示せよ。

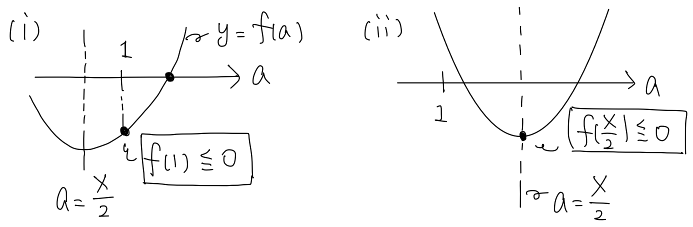
解答1 （逆像法を利用）

「点(X,Y)が領域F内にある」

$\Longleftrightarrow$「$a^2-Xa+Y-1=0$ …(*)をみたす実数aが$a \geqq 1$の範囲に存在する」…(ア)

よって、(ア)が成り立つようなX,Yの条件を求める。

$f(a)=a^2-Xa+Y-1$とおくと、$f(a)=\left(a-\dfrac{X}{2}\right)^2-\dfrac{X^2}{4}+Y-1$



(i) $\dfrac{X}{2}<1$，つまり，$X<2$のとき、

求める条件は、$f(1) \leqq 0$である

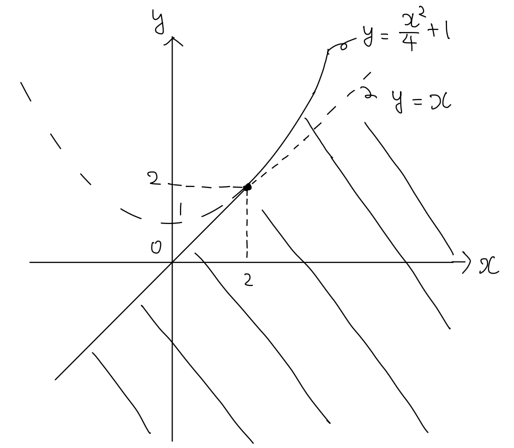
よって、$1-X+Y-1 \leqq 0$ $\therefore Y \leqq X$

(ii) $\dfrac{X}{2} \geqq 1$、つまり，$X \geqq 2$のとき.

求める条件は、$f\left(\dfrac{X}{2}\right) \leqq 0$である。

よって、$-\dfrac{X^2}{4}+Y-1 \leqq 0$ $\therefore Y \leqq \dfrac{X^2}{4}+1$

(i),(ii)より，F：$\begin{cases} y \leqq x & (x<2) \\ y \leqq \dfrac{x^2}{4}+1 & (x \geqq 2) \end{cases}$



領域Fは図の斜線部である。
ただし、境界を含む

解答2 （ファクシミリの原理を利用）

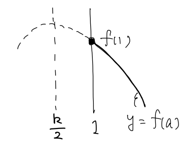
lは、$y=-a^2+xa+1$

$x=k$（定数）で固定して、aを$a \geqq 1$で変化させたときのyのとりうる範囲を求める。

$f(a)=-a^2+ka+1$とすると、$f(a)=-\left(a-\dfrac{k}{2}\right)^2+\dfrac{k^2}{4}+1$

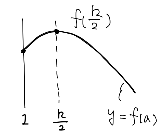
(i) $\dfrac{k}{2}<1$，つまり，$k<2$のとき、

$y \leqq f(1)$ $\therefore y \leqq k$



(ii) $\dfrac{k}{2} \geqq 1$，つまり，$k \geqq 2$のとき、

$y \leqq f\left(\dfrac{k}{2}\right)$ $\therefore y \leqq \dfrac{k^2}{4}+1$



(i),(ii)より、xを実数全体で動かすと、領域は以下のようになる。

F：$\begin{cases} y \leqq x & (x<2) \\ y \leqq \dfrac{x^2}{4}+1 & (x \geqq 2) \end{cases}$ （図は解答1参照）

解答3 （包絡線の利用）

lは $y=-\left(a-\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{x^2}{4}+1$ …①

$y=\dfrac{x^2}{4}+1$ …② とする。

①，②より、yを消去すると、

$-\left(a-\dfrac{x}{2}\right)^2=0 \Longleftrightarrow (x-2a)^2=0$ $\therefore x=2a$（重解）

よって、

lは $y=\dfrac{x^2}{4}+1$上の点$(2a,a^2+1)$における接線であり、

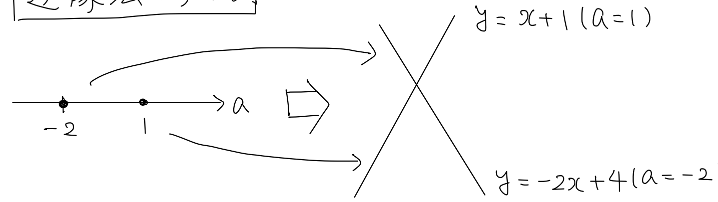
aを$a \geqq 1$で変化させると、lは、$y=\dfrac{x^2}{4}+1$に接しながら、

$x \geqq 2$の範囲を動く。（図は解答1参照）

最後に、通過領域の解法である ①逆像法の利用
②ファクシミリの原理 について、次の例について、
具体化（実験）を通して、理解を深めておきましょう。

（例） aがすべての実数値をとって変化するとき、
直線l：$y=ax+a^2$が通過する領域を考えてみよう。

逆像法の考え方



aを1つ決めると、直線が1つ定まるが、すべての実数aを代入して、
すべての直線を求めるのは、困難である。（実数は無限にあるので…）
そこで、逆の発想として、aを先に決めるのではなく、
「点(X,Y)が通過領域内にある」

$\Longleftrightarrow$「点(X,Y)を通る直線が少なくとも1つ存在する」

$\Longleftrightarrow$「$a^2+Xa-Y=0$をみたす実数aが存在する」と言い換え、

通過領域（点の集合）の点を作り出す実数aがあるのかに着目する。

点$(1,2)$は通過する？ $\Rightarrow$ $a^2+a-2=0$ $\therefore a=-2,1$

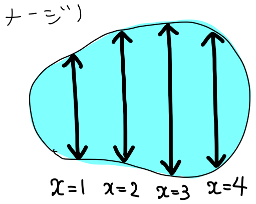
実数aが2つ存在したので、点$(1,2)$を通る直線が2本ある。

点$(1,-2)$は通過する？ $\Rightarrow$ $a^2+a+2=0$ $\therefore a=-1 \pm i$

実数aが存在しなかったので、点$(1,-2)$を通る直線はない。

ファクシミリの原理の考え方

（イメージ）



（通過領域）

xを固定して、aを変化させて、
yのとりうる範囲を求める。
「xを固定しては、少しずらす」を繰り返し、
各xで、yの最大・最小を求めていくイメージ。

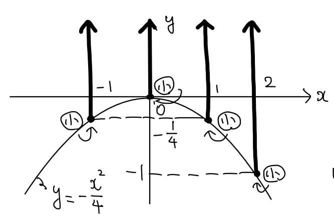
l：$y=ax+a^2=\left(a+\dfrac{x}{2}\right)^2-\dfrac{x^2}{4}$

$x=-1$のとき、$y=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} \geqq -\dfrac{1}{4}$（最小値）← $x=-1$の線上で!!

$x=0$のとき、$y=a^2 \geqq 0$（最小値）← $x=0$の線上で!!

$x=1$のとき、$y=a^2+a=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} \geqq -\dfrac{1}{4}$（最小値） ← $x=1$の線上で!!

$x=2$のとき、$y=a^2+2a=(a+1)^2-1 \geqq -1$（最小値） ← $x=2$の線上で!!



左の↑を各x（固定）で図示し、少しずつずらして、領域を描いていく（ファクシミリ）。

$x=k$で固定すると、

$y=a^2+ka=\left(a+\dfrac{k}{2}\right)^2-\dfrac{k^2}{4} \geqq -\dfrac{k^2}{4}$ ↑ $-\dfrac{k^2}{4}$

$x=k$
これをずらすイメージ