微分法　演習プリント　No.1　解答

１．［クリアー数学Ⅲ 問題150］

次の関数を微分せよ。ただし，a は正の定数とする。

(1)　$y=e^{x\log x}$　(2)　$y=10^{\sin x}$　(3)　$y=e^{-2x}\cos 2x$

(4)　$y=\log|\log x|$　(5)　$y=\log_x a$　(6)　$y=\log(x+\sqrt{x^2+4})$

(7)　$y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$　(8)　$y=\log\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$　(9)　$y=\log\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

(1)　$y'=e^{x\log x}(x\log x)'$

$=e^{x\log x}\{(x)'\log x+x(\log x)'\}$

$=e^{x\log x}\left(\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=(\log x+1)e^{x\log x}$

参考　対数の定義 $M=a^p \iff \log_a M=p$ から，$M=a^{\log_a M}$ が成り立つ。

よって　$y=e^{\log x^x}=x^x$

ここで，真数は正であるから　$x>0$

対数微分法を用いて解くこともできる。

(2)　$y'=10^{\sin x}\log 10\cdot(\sin x)'=10^{\sin x}(\cos x)\log 10$

(3)　$y'=(e^{-2x})'\cos 2x+e^{-2x}(\cos 2x)'$

$=e^{-2x}\cdot(-2)\cdot\cos 2x+e^{-2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2$

$=-2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)$

(4)　$y'=\dfrac{1}{\log x}\cdot(\log x)'=\dfrac{1}{x\log x}$

(5)　底の変換公式から　$\log_x a=\dfrac{\log a}{\log x}$

よって，$y=(\log a)\cdot\dfrac{1}{\log x}$ であるから

$$y'=(\log a)\left\{-\frac{(\log x)'}{(\log x)^2}\right\}=-\frac{\log a}{x(\log x)^2}$$

注意　導関数 y' の定義域は，$x>0$ かつ $x\neq 1$ から　$0<x<1$，$1<x$

(6)　$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot(x+\sqrt{x^2+4})'$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(7)　$y=\log|2x-1|-\log|2x+1|$ であるから

$$y'=\frac{(2x-1)'}{2x-1}-\frac{(2x+1)'}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{4}{4x^2-1}$$

(8)　$y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\{\log(x^2-1)-\log(x^2+1)\}$

よって　$y'=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1}-\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{2x}{x^4-1}$

注意　導関数 y' の定義域は，$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}>0$ から　$x<-1$，$1<x$

(9)　$y=\dfrac{1}{2}\{\log(1+\cos x)-\log(1-\cos x)\}$

よって　$y'=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}-\dfrac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}-\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-\sin x(1-\cos x)-\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$=\dfrac{-\sin x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin x}$

注意　導関数 y' の定義域は，$\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}>0$ から　$x\neq m\pi$　(m は整数)

２．［クリアー数学Ⅲ 問題152］

関数 $y=\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ とする。

(1)　$f(x)$ の定義域，値域を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ について，$\dfrac{dx}{dy}$ を y の関数として表せ。

(3)　導関数 $f'(x)$ を x の関数として表せ。

(1)　$y=\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値域は　実数全体

よって，$f(x)$ の定義域は　実数全体，　値域は　$-\dfrac{\pi}{2}<f(x)<\dfrac{\pi}{2}$

(2)　$y=f(x)$ のとき，$x=\tan y$ であるから　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}$

(3)　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$ であるから　$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{1+x^2}$

微分法　演習プリント　No.1　解答

３．［クリアー数学Ⅲ 問題159］

次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1)　$(y+1)^2=x^2+x$　　(2)　$x^2-xy-y^2=1$

(3)　$x^3+y^3-3xy=0$　　(4)　$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$

(1)　両辺を x で微分すると　$2(y+1)\cdot\dfrac{dy}{dx}=2x+1$

よって，$y\fallingdotseq -1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+1}{2(y+1)}$

(2)　両辺を x で微分すると　$2x-\left(y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

ゆえに　$(x+2y)\dfrac{dy}{dx}=2x-y$

よって，$x+2y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+2y}$

(3)　両辺を x で微分すると　$3x^2+3y^2\cdot\dfrac{dy}{dx}-3\left(y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

ゆえに　$(x-y^2)\dfrac{dy}{dx}=x^2-y$

よって，$x-y^2\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$

(4)　両辺を x で微分すると　$\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$x\fallingdotseq 0$，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

４．［クリアー数学Ⅲ 問題164］

$\lim\limits_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$ を用いて，次の極限を求めよ。

(1)　$\lim\limits_{h\to 0}(1-4h)^{\frac{1}{h}}$　　(2)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log(1+2h)}{h}$　　(3)　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

(1)　$-4h=k$ とおくと，$h\longrightarrow 0$ のとき $k\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{h\to 0}(1-4h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{k\to 0}(1+k)^{-\frac{4}{k}}=\lim_{k\to 0}\left\{(1+k)^{\frac{1}{k}}\right\}^{-4}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$$

(2)　$2h=k$ とおくと，$h\longrightarrow 0$ のとき $k\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+2h)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{2}{k}\log(1+k)=\lim_{k\to 0}2\log(1+k)^{\frac{1}{k}}=2\log e=2$$

(3)　$\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^x=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}$

$\dfrac{1}{x}=k$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき $k\longrightarrow +0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{k\to +0}\frac{1}{(1+k)^{\frac{1}{k}}}=\frac{1}{e}$$

５．［クリアー数学Ⅲ 問題165］

次の極限を求めよ。ただし，a は定数とする。

(1)　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$　　(2)　$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\log\dfrac{x}{2}$　　(3)　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2x-\sin^2a}{x-a}$

(1)　$f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$，$f(1)=e$ であるから

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e$$

(2)　$f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(2)=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\log\frac{x}{2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{2}$$

別解　$x-2=t$ とおくと，$x\longrightarrow 2$ のとき $t\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\log\frac{x}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log\frac{t+2}{2}=\lim_{t\to 0}\log\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\log\left\{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\log e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

(3)　$f(x)=\sin^2x$ とおくと，$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$ であるから

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2x-\sin^2a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\sin 2a$$