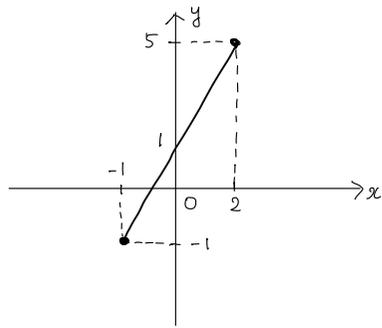


逆像法

問題1 関数 $y=2x+1$ ($-1 \leq x \leq 2$) の値域を求めよ。

(一般的な解法)



$x = -1$ のとき、 $y = -1$

$x = 2$ のとき、 $y = 5$

よって、左図より、

$-1 \leq y \leq 5$

(逆像法による解法)

考え方

$y = 3$ のとき、 $3 = 2x + 1$

$\therefore x = 1$ ($-1 \leq x \leq 2$ をみたす)

← $\begin{cases} y = 3$ となるような実数 x が
定義域内に存在する

$y = -3$ のとき、 $-3 = 2x + 1$

$\therefore x = -2$ ($-1 \leq x \leq 2$ をみたさない)

← $\begin{cases} y = -3$ となるような実数 x が
定義域内に存在しない

これを一般化すれば、

$y = k$ となるような実数 x が定義域内に存在する条件で、

k のとりうる範囲、つまり、 y のとりうる範囲が求まる。

解答

$y = k$ のとき、 $2x + 1 = k \Leftrightarrow x = \frac{k-1}{2}$

$-1 \leq x \leq 2$ より、 $-1 \leq \frac{k-1}{2} \leq 2 \quad \therefore -1 \leq k \leq 5$

よって、 $-1 \leq y \leq 5$

(書き方2) $y = 2x + 1$ をみたす実数 x が $-1 \leq x \leq 2$ に存在する
ような y のとりうる範囲を考える。

$y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$

$-1 \leq x \leq 2$ より、 $-1 \leq \frac{y-1}{2} \leq 2 \quad \therefore -1 \leq y \leq 5$

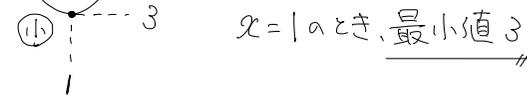
問題2 関数 $y = x^2 - 2x + 4$ の最小値を求めよ。

(一般的な解法)

$y = x^2 - 2x + 4$

$= (x-1)^2 + 3$

$y = x^2 - 2x + 4$



(逆像法による解法)

考え方

$y = 4$ のとき、 $4 = x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$\therefore x = 0, 2$ ← ($y = 4$ となる実数 x が存在する)

$y = -4$ のとき、 $-4 = x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 8 = 0$

$\therefore x = 1 \pm \sqrt{7}i$ ← ($y = -4$ となる実数 x が存在しない)

これを一般化すれば、

$y = k$ となるような実数 x が存在する条件で、

k のとりうる範囲、つまり、 y のとりうる範囲が求まり、
最小値が求まる。

解答

$y = k$ のとき、 $x^2 - 2x + 4 - k = 0 \dots (*)$

(*) の判別式を D とすると、(*) をみたす実数 x が
存在するとき、 $D \geq 0$ である。

よって、 $D \geq 0$ より、 $1 - (4 - k) \geq 0 \quad \therefore k \geq 3$

したがって、 $y \geq 3$ より、最小値 3

(書き方2) $y = x^2 - 2x + 4$ をみたす実数 x が存在するような
 y のとりうる範囲を考える。

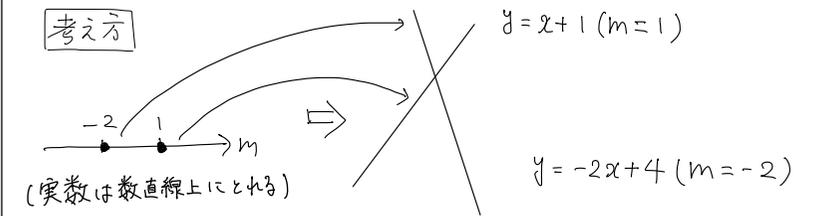
$x^2 - 2x + 4 - y = 0 \dots (*)$ の判別式を D とすると

(*) をみたす実数 x が存在する条件は、 $D \geq 0$ である。

よって、 $D \geq 0$ より、 $1 - (4 - y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 3 \quad \therefore$ 最小値 3

問題3 m がすべての実数値をとって変化するとき、直線 $l: y = mx + m^2$ が
通過する領域を求め、図示せよ。

考え方

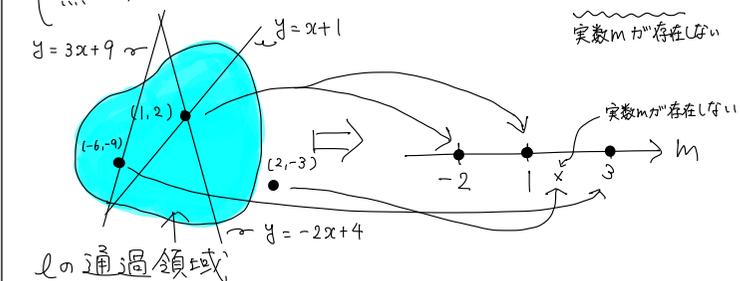


m を1つ決めると、直線が1つ定まるが、任意の実数 m を
代入して、すべての直線を求めるのは困難である。

そこで、逆の発想として、通過領域内の点は、その点を通る
直線が少なくとも1つ存在する、つまり、その点を通る直線を
作り出す実数 m が少なくとも1つ存在する。

(*)

- 点 $(1, 2)$ を通る? $\Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \quad \therefore m = -2, 1$ ← 点 $(1, 2)$ を通る
実数 m が存在 直線が2本ある。
- 点 $(-6, -9)$ を通る? $\Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \quad \therefore m = 3$ ← 点 $(-6, -9)$ を通る
実数 m が存在 直線が1本ある。
- 点 $(1, 1)$ を通る? $\Rightarrow m^2 + m - 1 = 0 \quad \therefore m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ← 点 $(1, 1)$ を通る
実数 m が存在 直線が2本ある。
- 点 $(2, -3)$ を通る? $\Rightarrow m^2 + 2m + 3 = 0 \quad \therefore m = -1 \pm \sqrt{2}i$ ← 点 $(2, -3)$ を通る
実数 m が存在しない 直線は1本もない。



(*) を一般化すると、

l が点 (X, Y) を通る $\Leftrightarrow m^2 + Xm - Y = 0$ をみたす実数 m が存在する

解答

l が点 (X, Y) を通るとき、 $m^2 + Xm - Y = 0 \dots (*)$ をみたす実数 m が存在する。

(*) の判別式を D とすると、 $D \geq 0$ である。

よって、 $D \geq 0$ より、 $X^2 + 4Y \geq 0 \Leftrightarrow Y \geq -\frac{1}{4} X^2$

したがって、

l が通過する領域は $y \geq -\frac{1}{4} x^2$ であり、
右図の斜線部。
ただし、境界を含む。

