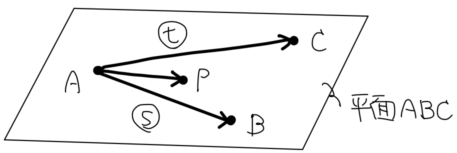
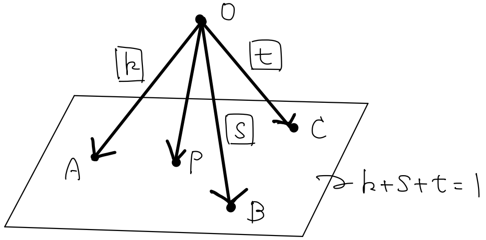
ベクトルの立式 (空間ベクトル)

◎ Pが平面ABC上



Pが平面ABC上のとき、 共面条件 (4点A,B,C,Pが同一平面上)

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ …① と表せる。



①において、始点をOにすると、

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}}$$ …②

②について、

$s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1$ のとき、
Pは△ABCの内部および周上にあり、
そうでないとき、△ABCの外部にある。

②において、$1-s-t=k$ とおくと、

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\quad (k+s+t=1)}$$

☆「$k+s+t=1$」を共面条件という

☆ 共面条件を利用するときは、

1.「始点がそろっている」
2.「終点4点が同一平面上にある」

を確認すること!!

コメント

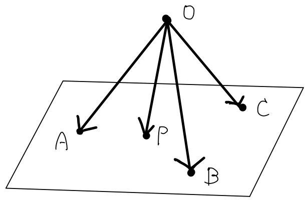
上の内容をしっかり理解して、自分の好きな方法で、ベクトルの立式の仕方を確立しましょう。

特に、マーク式の試験では、立式が誘導でついたりするので、理解して、誘導にのれるようにしましょう。

次の問題でいろんな立式方法を見ていこう。

問題

4点O,A,B,Cは、同一平面上にないものとする。点Pが平面ABC上にあるとき、$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ と適当な実数を用いて表せ。



(その1) 根本からスタート

Pは平面ABC上より、

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける。

よって、

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

(その2) つなげる

Pは平面ABC上より、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける。

よって、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

(その3) 常識として、利用

Pは平面ABC上より、

$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ とおける。

(その4) 共面条件を利用

Pは平面ABC上より、

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$ $(s+t+u=1)$ とおける。

解説

(その1)〜(その4)の結果の式は全て、

$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

であり、同じになっている。

((その4)もsを消去すれば、使っている文字が異なるだけで、同じである)