

無理関数 演習プリント 解答

1. [クリアー数学Ⅲ 問題13]

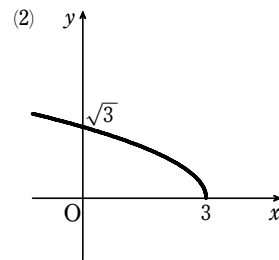
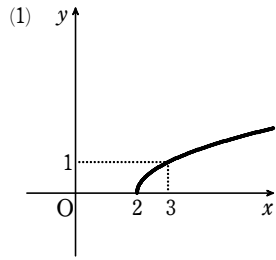
次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域を求めよ。

- (1) $y = \sqrt{x-2}$ (2) $y = \sqrt{3-x}$ (3) $y = \sqrt{-2x+3}$
 (4) $y = -\sqrt{2x+2}$ (5) $y = \sqrt{4x-2}$ (6) $y = -\sqrt{5-3x}$

(1) $y = \sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので、[図] のようになる。
 定義域は $x \geq 2$, 値域は $y \geq 0$

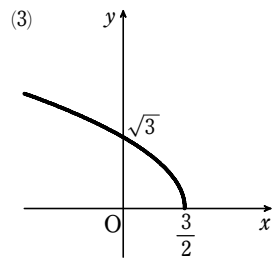
(2) $\sqrt{3-x} = \sqrt{-(x-3)}$

よって、 $y = \sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したもので、
 [図] のようになる。
 定義域は $x \leq 3$, 値域は $y \geq 0$



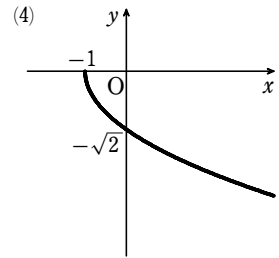
(3) $\sqrt{-2x+3} = \sqrt{-2(x-\frac{3}{2})}$

よって、 $y = \sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{3}{2}$ だけ平行移動したもので、
 [図] のようになる。
 定義域は $x \leq \frac{3}{2}$, 値域は $y \geq 0$



(4) $-\sqrt{2x+2} = -\sqrt{2(x+1)}$

よって、 $y = -\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので、
 [図] のようになる。
 定義域は $x \geq -1$, 値域は $y \leq 0$



(5) $\sqrt{4x-2} = \sqrt{4(x-\frac{1}{2})} = 2\sqrt{x-\frac{1}{2}}$

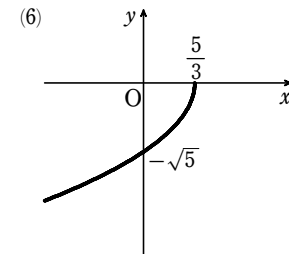
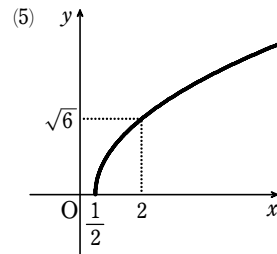
よって、 $y = 2\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

定義域は $x \geq \frac{1}{2}$, 値域は $y \geq 0$

(6) $-\sqrt{5-3x} = -\sqrt{-3(x-\frac{5}{3})}$

よって、 $y = -\sqrt{-3x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{5}{3}$ だけ平行移動したもので、[図] のようになる。

定義域は $x \leq \frac{5}{3}$, 値域は $y \leq 0$



2. [クリアー数学Ⅲ 問題20]

関数 $y = \sqrt{ax+b}$ が $-1 \leq x \leq 3$ の範囲において、最大値 3、最小値 1 をとるように、定数 a, b の値を定めよ。

[1] $a > 0$ のとき

$y = \sqrt{ax+b}$ は単調に増加するから、条件より

$x = -1$ のとき $y = 1$

$x = 3$ のとき $y = 3$

ゆえに $\sqrt{-a+b} = 1, \sqrt{3a+b} = 3$

よって $-a+b=1, 3a+b=9$

これを解いて $a=2, b=3$

これは $a > 0$ を満たす。

[2] $a = 0$ のとき

この関数は $y = \sqrt{b}$ (定数) となり、条件を満たさない。

[3] $a < 0$ のとき

$y = \sqrt{ax+b}$ は単調に減少するから、条件より

$x = -1$ のとき $y = 3$

$x = 3$ のとき $y = 1$

ゆえに $\sqrt{-a+b} = 3, \sqrt{3a+b} = 1$

よって $-a+b=9, 3a+b=1$

これを解いて $a=-2, b=7$

これは $a < 0$ を満たす。

[1] ~ [3] から $a=2, b=3$ または $a=-2, b=7$

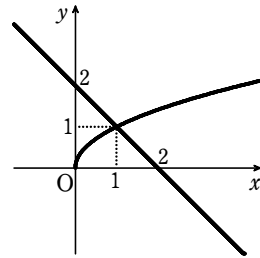
無理関数 演習プリント 解答

3. [クリアー数学Ⅲ 問題19]

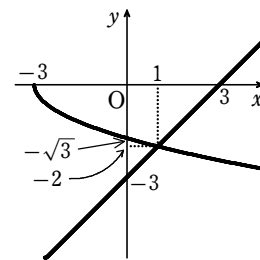
次の方程式, 不等式を解け。

- (1) $\sqrt{x} = -x+2$ (2) $-\sqrt{x+3} = x-3$ (3) $\sqrt{2x-3} = x-1$
 (4) $\sqrt{x+1} > -x+5$ (5) $\sqrt{x+1} \leq -x+5$ (6) $3\sqrt{x} > x+2$

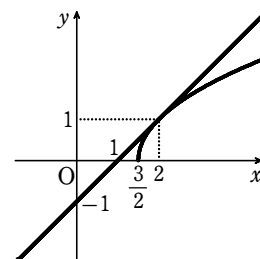
(1) $\sqrt{x} = -x+2$ ……①
 の両辺を2乗すると $x = (-x+2)^2$
 整理して $x^2 - 5x + 4 = 0$
 したがって $x = 1, 4$
 このうち, ①を満たすのは $x = 1$



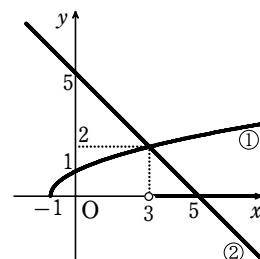
(2) $-\sqrt{x+3} = x-3$ ……①
 の両辺を2乗すると $x+3 = (x-3)^2$
 整理して $x^2 - 7x + 6 = 0$
 したがって $x = 1, 6$
 このうち, ①を満たすのは $x = 1$



(3) $\sqrt{2x-3} = x-1$ ……①
 の両辺を2乗すると $2x-3 = (x-1)^2$
 整理して $x^2 - 4x + 4 = 0$
 したがって $x = 2$
 これは①を満たす。

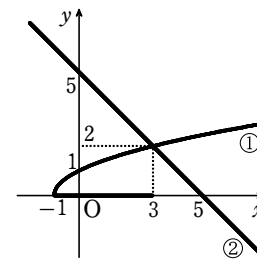


(4) $y = \sqrt{x+1}$ ……① と $y = -x+5$ ……②
 のグラフについて, 共有点の x 座標は方程式
 $\sqrt{x+1} = -x+5$ ……③
 の解である。
 両辺を2乗して $x+1 = (-x+5)^2$
 整理すると $x^2 - 11x + 24 = 0$
 これを解いて $x = 3, 8$
 このうち, ③を満たすのは $x = 3$
 不等式の解は, ①のグラフが直線②より上側
 にある x の値の範囲であるから, 図より $x > 3$

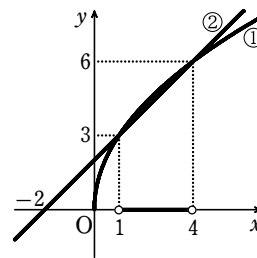


【参考】不等式 $\sqrt{x+1} > -x+5$ の解は
 [1] $-x+5 \geq 0$ ……① かつ $x+1 > (-x+5)^2$ ……②
 または
 [2] $x+1 \geq 0$ ……③ かつ $-x+5 < 0$ ……④
 を満たす x の値の範囲である。
 [1] ①から $x \leq 5$
 ②を整理すると $x^2 - 11x + 24 < 0$
 これを解いて $3 < x < 8$
 これと $x \leq 5$ との共通範囲は $3 < x \leq 5$
 [2] ③から $x \geq -1$, ④から $x > 5$
 共通範囲は $x > 5$
 求める x の値の範囲は, [1], [2] の和集合であるから $x > 3$

(5) (4)から, $y = \sqrt{x+1}$ ……① と
 $y = -x+5$ ……②のグラフの共有点の x 座標は,
 $x = 3$ である。
 不等式の解は, ①のグラフが直線②より下側に
 あるか, または共有点をもつような x の値の範囲
 であるから, 図より $-1 \leq x \leq 3$
注意 関数 $y = \sqrt{x+1}$ の定義域は $x+1 \geq 0$ より,
 $x \geq -1$ であることに注意する。



(6) $y = 3\sqrt{x}$ ……① と $y = x+2$ ……②
 のグラフについて, 共有点の x 座標は, 方程式
 $3\sqrt{x} = x+2$ ……③
 の解である。
 両辺を2乗して $9x = (x+2)^2$
 整理すると $x^2 - 5x + 4 = 0$
 これを解いて $x = 1, 4$
 これらは③を満たす。
 不等式の解は, ①のグラフが直線②より上側に
 ある x の値の範囲であるから, 図より
 $1 < x < 4$



4. [クリアー数学Ⅲ 問題34]

方程式 $\sqrt{x+1} = x+a$ が異なる2つの実数解をもつときの定数 a の値の範囲を求めよ。

$\sqrt{x+1} = x+a$ ……①とおく。
 ①が異なる2つの実数解をもつのは, $y = \sqrt{x+1}$ のグラフと直線 $y = x+a$ が共有点を2
 個もつときである。

①の両辺を2乗して整理すると
 $x^2 + (2a-1)x + a^2 - 1 = 0$ ……②
 この判別式を D とすると
 $D = (2a-1)^2 - 4(a^2-1) = -4a+5$

2つのグラフが接するとき, $D=0$ であるから $a = \frac{5}{4}$

このとき②の解は $x = -\frac{3}{4}$

これは①を満たす。
 また, $y = x+a$ のグラフが点 $(-1, 0)$ を通るとき
 $0 = -1+a$
 すなわち $a = 1$

よって, 右の図から, 共有点を2個もつときの a の
 値の範囲は $1 \leq a < \frac{5}{4}$

