通過領域の演習プリント　解答

１．［筑波大］

(1)　直線 OA の傾きは　$\dfrac{1}{t}$

また，線分 OA の中点の座標は　$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって，線分 OA の垂直二等分線の方程式は　$y=-t\left(x-\dfrac{t}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$

すなわち　$y=-tx+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$　　ただし　$t \leqq -1,\ 1 \leqq t$

(2)　$y=-tx+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ を変形すると

$$t^2-2xt-2y+1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$f(t)=t^2-2xt-2y+1$ とおく。

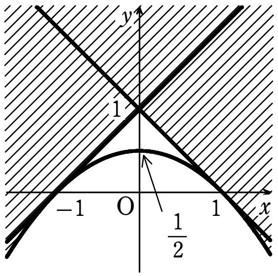
求める条件は　$\begin{cases} f(t)=0 \text{ の判別式 } D \text{ について} \quad D \geqq 0 \\ t \leqq -1 \text{ または } 1 \leqq t \end{cases}$

① から　$\dfrac{D}{4}=x^2+2y-1 \geqq 0$　すなわち　$y \geqq -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$　$\cdots\cdots$ ②

① を満たす実数 t がすべて $-1<t<1$ である場合は

$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ -1<x<1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} y \geqq -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} \\ y<x+1 \\ y<-x+1 \\ -1<x<1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

よって，求める領域は，② の表す領域から，③ の表す領域を除いたもので，右の図のようになる。ただし，境界線を含む。



2．［山口大（医）］逆像法による解法

求める領域をFとする。

点(X, Y)が領域F内にある

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2t^3-3Xt^2+X^3+Y=0 \\ 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0 \leqq X \leqq 1 \end{array}\right.$$

…(*)をみたす実数tが存在する。

$f(t)=2t^3-3Xt^2+X^3+Y$ とおくと

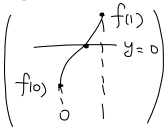
$f'(t)=6t^2-6Xt=6t(t-X)$

(i) $X=0$のとき

$f'(t)=6t^2 \geqq 0$より、$f(t)$は単調増加なので、(*)が成り立つ条件は、

$f(0) \leqq 0 \leqq f(1)$ である

$\therefore -2 \leqq Y \leqq 0$



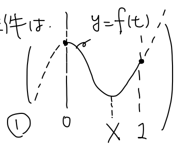
(ii) $0 < X \leqq 1$のとき、

$f'(t)=0 \iff t=0, X$

$f(t)$は$t=0$で極大、$t=X$で極小をとる

(*)が成り立つ必要条件は、$f(X) \leqq 0$ である。

$f(X) \leqq 0 \iff Y \leqq 0$ …①



①の下で(*)が成り立つ条件は

$f(0) \geqq 0$ または $f(1) \geqq 0$ である

$\therefore Y \geqq -X^3$ または $Y \geqq -X^3+3X-2$

(i),(ii)より、領域Fが表す不等式は、

$$\left\{\begin{array}{l} y \leqq 0 \\ 「y \geqq -x^3 \text{ または } y \geqq -x^3+3x-2」 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{array}\right.$$

$g_1(x)=-x^3$ とおくと、$g_1'(x)=-3x^2 \leqq 0$

よって、

$g_1(x)$は $0 \leqq x \leqq 1$ において、単調減少

また、

$g_2(x)=-x^3+3x-2$ とおくと、

$g_2'(x)=-3(x+1)(x-1)$

よって、

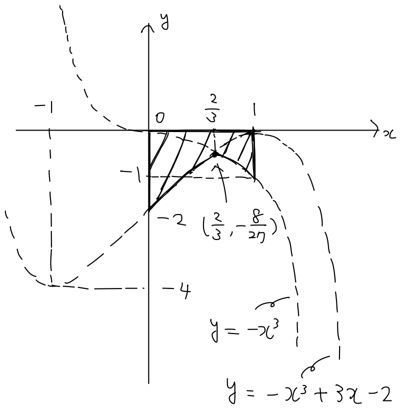
$0 \leqq x \leqq 1$ において、$g_2'(x) \geqq 0$ より

$g_2(x)$は $0 \leqq x \leqq 1$ において、単調増加

$y=g_1(x)$と$y=g_2(x)$の交点は$\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}\right)$

以上より、

領域Fは図の斜線部で境界を含む。



$$S=-\int_0^{\frac{2}{3}}(-x^3+3x-2)\,dx-\int_{\frac{2}{3}}^1(-x^3)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}}(x^3-3x+2)\,dx+\int_{\frac{2}{3}}^1 x^3\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{\frac{2}{3}}^1$$

$$=\frac{4}{81}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{65}{81}$$

$$=\frac{81}{4\cdot 81}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{11}{12}$$