

反転

1. 反転とは.

定点 O を中心とする半径 r の円がある.

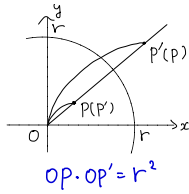
点 O を通る直線上に、 O と異なる点 P をとり、

半直線 OP 上に点 P' を $OP \cdot OP' = r^2$ によって定める.

このとき、点 P に点 P' を対応させることを「反転」という.

また、点 P が円形 F 上を動くとき、点 P' が描く図形 F' を

F の「反形」という.



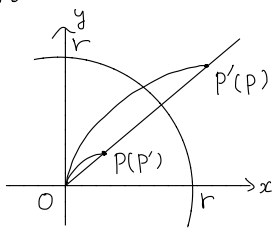
2. 反転の性質

反転は、点 P を「 $f: OP \cdot OP' = r^2$ 」によって別の点 P' に移す変換である.

P と P' には、以下の関係がある. ($OP = r$ のときは、 $P = P'$ (不動点))

(λ の 1)

1. $OP > r \iff OP' < r$
2. $OP = r \iff OP' = r$
3. $OP < r \iff OP' > r$



(λ の 2) 少し重要

「点 $P \xrightarrow{f} \text{点 } P'$ 」 (点 P の反転先は点 P') であり、
 「点 $P' \xrightarrow{f} \text{点 } P$ 」 (点 P' の反転先は点 P) である.

3. 反転先の点の座標 (重要)

$$OP \cdot OP' = r^2 \quad (r > 0) \dots (*)$$

$P(x, y)$, $P'(X, Y)$ とすると、 $(x, y) \neq (0, 0)$, $(X, Y) \neq (0, 0)$

$$\vec{OP}' = |\vec{OP}'| \cdot \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|} = \frac{r^2}{|\vec{OP}|^2} \vec{OP} \quad (\because (*)) \text{ より}$$

$\frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|}$: \vec{OP} と同じ向きの単位ベクトル

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{r^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \therefore (X, Y) = \left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

左記の (λ の 2) から、 $P\left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\right)$, $P'\left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\right)$ である.

4. 反形について. (覚える必要はないが、知っておいても損はない)

$f: OP \cdot OP' = r^2$ について、 P が O に一致するときは、 P' は定義できない.

(O の反転先は、定義できない)

点 O の反転先の点を仮に「無限遠点」と呼ぶことにする.

無限遠点とは、点 O からの距離が限りなく遠い点であり、

(\square) は、原点からの距離が有限の点の集合とみなし、

直線は、無限遠点を通るとみなすと以下が成り立つ.

1. 原点を通る直線	\xrightarrow{f} 原点を通る直線
2. 原点を通らない直線	\xrightarrow{f} 原点を通る円
3. 原点を通る円	\xrightarrow{f} 原点を通らない直線
4. 原点を通らない円	\xrightarrow{f} 原点を通らない円

反転では、
 「円または直線」は、
 「円または直線」に移る.

ポイント

原点を通る \rightarrow 反転後が無限遠点を通る \rightarrow 反形は直線
 原点を通らない \rightarrow 反転後が無限遠点を通らない \rightarrow 反形は円
 直線 \rightarrow 無限遠点を通る \rightarrow 反形は原点を通る
 円 \rightarrow 無限遠点を通らない \rightarrow 反形は原点を通らない