H③ 24番の解答と解説

24 四面体OABCにおいて、線分OA, AB, COをそれぞれ2:1に内分する点をD, E, Fとする。ベクトル$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$をそれぞれ$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分BC上の点Pが3点D, E, Fを含む平面上にあるとき、$\overrightarrow{OP}$を$\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。

(2) (1)でとった点Pに対して、四角形DEPFの対角線の交点をQとしたとき、$\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。

(方針)

(1) Pは「① BC上 ② 平面DEF上」を利用して、$\overrightarrow{OP}$を$\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて2通りで表して、係数比較

(2) Qは「① DP上 ② EF上」を利用

方法1

(1)から、$\overrightarrow{DP}$は$\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$を用いて表せる。

この式を利用して、$\overrightarrow{DP} = k \times \underbrace{\dfrac{n\overrightarrow{DE}+m\overrightarrow{DF}}{m+n}}_{\overrightarrow{DQ}}$ の形を作り、$\overrightarrow{DQ}$を$\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$を用いて表す。

方法2

$\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて、2通りで表して、係数比較

解答 (1) Pは線分BC上より、

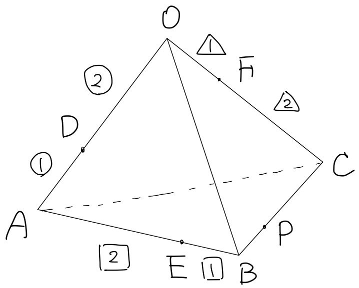
$\overrightarrow{OP} = (1-k)\vec{b} + k\vec{c}$ $(0 \leqq k \leqq 1)$と表せる。

また、Pは平面DEF上より、

$\overrightarrow{OP} = (1-s-t)\overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{OF}$ …①

$= \frac{2}{3}(1-s-t)\vec{a} + s\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{3}t\vec{c}$

$= \frac{1}{3}(2-s-2t)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c}$



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$は1次独立より、

$$\begin{cases} 2-s-2t=0 \\ \frac{2}{3}s = 1-k \\ \frac{1}{3}t = k \end{cases} \quad \therefore k=\frac{1}{9},\ s=\frac{4}{3},\ t=\frac{1}{3} \ (0 \leqq k \leqq 1 \text{をみたす})$$

よって、$\overrightarrow{OP} = \frac{8}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}$

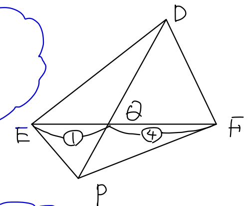
(2) (平面ベクトルを利用)

(1)の①より、

$\overrightarrow{OP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$ なので、

$\overrightarrow{DP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF} = \frac{5}{3}\cdot\frac{4\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}}{5}$

この式の根本は、$\overrightarrow{DP} = s\overrightarrow{DE} + t\overrightarrow{DF}$であり、始点をOに変えたもの



Qは、EF上かつDP上より、$\overrightarrow{DQ} = \frac{4\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}}{5}$ である

分子の係数の逆の比が内分比

よって、$\overrightarrow{OQ} = \frac{4\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{5}$ (∵ EQ:QF=1:4)

$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\vec{c}$

$= \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{8}{15}\vec{b} + \frac{1}{15}\vec{c}$

EQ:QF=1:4なら、$\overrightarrow{\square Q} = \frac{4\overrightarrow{\square E}+\overrightarrow{\square F}}{5}$であり、□は同じ文字なら、何を入れても成り立つ

(別解)(空間ベクトルを利用)

QはDP上より、

$\overrightarrow{OQ} = (1-x)\overrightarrow{OD} + x\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}(1-x)\vec{a} + \frac{8}{9}x\vec{b} + \frac{1}{9}x\vec{c}$ (∵(1))と表せる。

また、Qは、EF上より、

$\overrightarrow{OQ} = (1-y)\overrightarrow{OE} + y\overrightarrow{OF}$

$= (1-y)\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{3}y\vec{c}$

$= \frac{1}{3}(1-y)\vec{a} + \frac{2}{3}(1-y)\vec{b} + \frac{1}{3}y\vec{c}$ と表せる。

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$は1次独立より、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(1-x) = \frac{1}{3}(1-y) \\ \frac{8}{9}x = \frac{2}{3}(1-y) \\ \frac{1}{9}x = \frac{1}{3}y \end{cases} \quad \therefore x=\frac{3}{5},\ y=\frac{1}{5}$$

よって、$\overrightarrow{OQ} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{8}{15}\vec{b} + \frac{1}{15}\vec{c}$