等比数列の基本問題　自学自習用　解答

1．次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　初項 7，公比 $-\frac{1}{2}$　　(2)　初項 -3，公比 3

(3)　-5，-10，-20，-40，……

(1)　$a_n=7\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2)　$a_n=-3\cdot3^{n-1}$　　すなわち　$a_n=-3^n$

(3)　公比を r とすると，$-5r=-10$ より　$r=2$

よって　$a_n=-5\cdot2^{n-1}$

2．第 4 項が 32，第 6 項が 128 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

第 4 項が 32 であるから　$ar^3=32$　……①

第 6 項が 128 であるから　$ar^5=128$　……②

①，② より　$r^2=4$　　これを解くと　$r=\pm2$

① から　$r=2$ のとき $a=4$，　$r=-2$ のとき $a=-4$

よって，一般項は　$a_n=4\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=(-4)\cdot(-2)^{n-1}$

すなわち　$a_n=2^{n+1}$　または　$a_n=-(-2)^{n+1}$

3．次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　初項 4，公比 5　　(2)　初項 2，公比 -2

(3)　-7，-14，-28，-56，……　　(4)　$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6^2}$，$\frac{1}{6^3}$，$\frac{1}{6^4}$，……

(1)　$S_n=\frac{4(5^n-1)}{5-1}=\frac{4(5^n-1)}{4}=5^n-1$

(2)　$S_n=\frac{2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{2}{3}\{1-(-2)^n\}$

(3)　この等比数列の初項は -7，公比は 2 である。

よって　$S_n=\frac{-7(2^n-1)}{2-1}=-7(2^n-1)$

(4)　この等比数列の初項は $\frac{1}{6}$，公比は $\frac{1}{6}$ である。

よって　$S_n=\dfrac{\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{6}}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{6\left(1-\frac{1}{6}\right)}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{6^n}\right)$

4．第 2 項が 5，初項から第 3 項までの和が 31 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

条件から　$ar=5$　……①

$a+ar+ar^2=31$　……②

② より　$a(1+r+r^2)=31$

この式の両辺に r を掛けると　$ar(1+r+r^2)=31r$

① を代入して　$5(1+r+r^2)=31r$　　整理すると　$5r^2-26r+5=0$

すなわち　$(r-5)(5r-1)=0$　　ゆえに　$r=5$，$\frac{1}{5}$

① から　$r=5$ のとき $a=1$，　$r=\frac{1}{5}$ のとき $a=25$

したがって　$a=1$，$r=5$　または　$a=25$，$r=\frac{1}{5}$

5．初項から第 3 項までの和が 13，第 2 項から第 4 項までの和が -52 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

条件から　$a+ar+ar^2=13$　……①

$ar+ar^2+ar^3=-52$　……②

② より　$r(a+ar+ar^2)=-52$

① を代入して　$13r=-52$　　よって　$r=-4$

これを ① に代入すると　$a-4a+16a=13$　　これを解いて　$a=1$

したがって　$a=1$，$r=-4$