$\boxed{22}$ $xy$ 平面において、原点Oを通る半径 $r$ $(r>0)$ の円を $C$ とし、その中心をAとする。Oを除く $C$ 上の点Pに対し、次の2つの条件(a), (b)で定まる点Qを考える。

(a)　$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1) 点PがOを除く $C$ 上を動くとき、点Qは $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2) (1)の直線を $l$ とする。$l$ が $C$ と2点で交わるとき、$r$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)　$Q(X,Y)$ とおくと 条件(a)より、$(X,Y)\neq(0,0)$

$\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|\dfrac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}$　(∵条件(a))

$=\dfrac{1}{|\overrightarrow{OQ}|^2}\overrightarrow{OQ}$　(∵条件(b))

$=\dfrac{1}{X^2+Y^2}(X,Y)$

$\therefore\ P\left(\dfrac{X}{X^2+Y^2},\ \dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)$

$A(s,t)$ とすると、$C:(x-s)^2+(y-t)^2=r^2$

Pは円C上より、

$\left(\dfrac{X}{X^2+Y^2}-s\right)^2+\left(\dfrac{Y}{X^2+Y^2}-t\right)^2=r^2$

$\dfrac{1}{X^2+Y^2}-\dfrac{2sX}{X^2+Y^2}-\dfrac{2tY}{X^2+Y^2}+s^2+t^2-r^2=0$

ここで、$OA=r$ より $OA^2=r^2 \iff s^2+t^2=r^2$ …①

$\therefore\ 2sX+2tY-1=0$

Qは、直線 $2sx+2ty-1=0$ 上を動く。

この直線を $l'$ とし、$l'$ の法線ベクトルの1つを $\vec{n}$ とすると、$\vec{n}=(2s,2t)$

$\overrightarrow{OA}=(s,t)$ より、$\vec{n}\parallel\overrightarrow{OA}$　$\therefore\ l'\perp\overrightarrow{OA}$

よって、題意は示された。

(2)　(1)より、$l:2sx+2ty-1=0$

$l$ と $C$ が2点で交わる条件は

$\dfrac{|2s^2+2t^2-1|}{\sqrt{4s^2+4t^2}}<r$

$\dfrac{|2r^2-1|}{2r}<r$　(∵①)

$|2r^2-1|<2r^2$

両辺正より、2乗すると、

$4r^4-4r^2+1<4r^4$

$r^2>\dfrac{1}{4}$

$r>0$ より、$\underline{r>\dfrac{1}{2}}$ //