H③ 12番の別解と補足

12 Oを原点とする座標平面上に
放物線 $C_1: y=x^2$
円 $C_2: x^2+(y-a)^2=1\ (a \geqq 0)$
がある。C_2 の点 $(0,\ a+1)$ における接線と C_1 が2点A, Bで交わり、△OABが C_2 に外接しているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を求めよ。

(2) 点 $(s,\ t)$ を $(-1,\ a)$, $(1,\ a)$, $(0,\ a-1)$ と異なる C_2 上の点とする。そして点 $(s,\ t)$ における C_2 の接線と C_1 との2つの交点を $P(\alpha,\ \alpha^2)$, $Q(\beta,\ \beta^2)$ とする。このとき、$(\alpha-\beta)^2-\alpha^2\beta^2$ は $s,\ t$ によらない定数であることを示せ。

(3) (2)において、点 $P(\alpha,\ \alpha^2)$ から C_2 への2つの接線がふたたび C_1 と交わる点を $Q(\beta,\ \beta^2)$, $R(\gamma,\ \gamma^2)$ とする。$\beta+\gamma$ および $\beta\gamma$ を α を用いて表せ。

(4) (3)の2点Q, Rに対し、直線QRは C_2 と接することを示せ。

---

(1) $a=2$

(2) (1)より、$C_2: x^2+(y-2)^2=1$

$a=2$ と条件より、$(s,t)\neq(-1,2),(1,2),(0,1)$ であり、
点 (s,t) における接線の方程式は、

$sx+(t-2)(y-2)=1$

$sx+(t-2)y-2t+3=0$

これと $y=x^2$ を連立して、

$(t-2)x^2+sx-2t+3=0$ …(*)

(*)の2解が α,β より、解と係数の関係から、

$$\alpha+\beta=-\frac{s}{t-2},\quad \alpha\beta=-\frac{2t-3}{t-2}$$

よって、$(\alpha-\beta)^2-\alpha^2\beta^2$

$$=(\alpha+\beta)^2-(\alpha\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\frac{s^2-(2t-3)^2+4(2t-3)(t-2)}{(t-2)^2}$$

$$=\frac{1-(t-2)^2-(4t^2-12t+9)+4(2t^2-7t+6)}{(t-2)^2}\quad (\because (s,t)\text{は円}C_2\text{上})$$

$$=\frac{3(t-2)^2}{(t-2)^2}$$

$$=3$$

したがって、題意は示された。

(3) 「$(s,t)\neq(-1,2),(1,2),(0,1)$ なので $\alpha\neq\pm1$」のところの参考図。