17 実数aに対し、xy平面上の放物線$C: y=(x-a)^2-2a^2+1$を考える。次の問いに答えよ。

(1) aがすべての実数を動くとき、Cが通過する領域を求め、図示せよ。

(2) aが$-1\leqq a\leqq 1$の範囲を動くとき、Cが通過する領域を求め、図示せよ。

(2) (別解1) 2解(重解を含む) or ただ1つの解をもつで場合分け

$y=(x-a)^2-2a^2+1$

$\iff a^2+2xa-x^2+y-1=0 \cdots (*)$

求める領域Fとする。

「点(x,y)がF内にある」

$\iff$「(*)をみたす実数aが$-1\leqq a\leqq 1$に存在する」…(☆)より。

(☆)が成り立つ条件を求める。

$f(a)=a^2+2xa-x^2+y-1$ とおくと

$f(a)=(a+x)^2-2x^2+y-1$

ay平面で、$y=f(a)$の軸は、$a=-x$

(i) (*)が$-1<a<1$に2解(重解を含む)をもつとき、

$$\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ f(-x)\leqq 0 \\ -1<-x<1 \end{cases} \iff \begin{cases} y>x^2+2x \\ y>x^2-2x \\ y\leqq 2x^2+1 \\ -1<x<1 \end{cases}$$

(ii) (*)が$-1<a<1$に重解でないただ1つの解をもつとき、

$$\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(1)>0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x^2-2x<y<x^2+2x \\ \text{または}\quad x^2+2x<y<x^2-2x \end{array}$$

(iii) (*)が$a=-1$または$a=1$を解にもつ

$f(-1)=0$ または $f(1)=0$

$\iff y=x^2+2x$ または $y=x^2-2x$ (以下略)

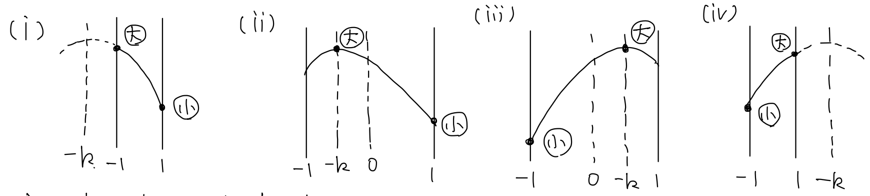
(別解2) ファクシミリの原理を利用

Cは、$y=-a^2-2xa+x^2+1$

$x=k$(定数)で固定して、yのとりうる値の範囲を求める。

$f(a)=-a^2-2ka+k^2+1$ とおくと、$f(a)=-(a+k)^2+2k^2+1$

ay平面で、$y=f(a)$の軸は、$a=-k$



(i) $-k<-1$, つまり, $k>1$のとき、

$f(1)\leqq y\leqq f(-1)$より、 $k^2-2k\leqq y\leqq k^2+2k$

(ii) $-1\leqq -k<0$、つまり、$0<k\leqq 1$のとき、

$f(1)\leqq y\leqq f(-k)$より、 $k^2-2k\leqq y\leqq 2k^2+1$

(iii) $0\leqq -k<1$, つまり、$-1<k\leqq 0$のとき、

$f(-1)\leqq y\leqq f(-k)$より、 $k^2+2k\leqq y\leqq 2k^2+1$

(iv) $1\leqq -k$, つまり, $k\leqq -1$

$f(-1)\leqq y\leqq f(1)$より、 $k^2+2k\leqq y\leqq k^2-2k$

(i)〜(iv)より、xを実数全体で動かすと、

Cが通過する領域は

$$\begin{cases} x^2-2x\leqq y\leqq x^2+2x & (x>1) \\ x^2-2x\leqq y\leqq 2x^2+1 & (0<x\leqq 1) \\ x^2+2x\leqq y\leqq 2x^2+1 & (-1<x\leqq 0) \\ x^2+2x\leqq y\leqq x^2-2x & (x\leqq -1) \end{cases}$$