◎ コーシー・シュワルツの不等式

C-Sの不等式：$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^2$

1. $n=2$ のとき.(文字は.上記のものと変えています)

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

2. $n=3$ のとき.(文字は.上記のものと変えています)

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

3. 一般のとき.

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geqq (a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2$

(ポイント)

ベクトルの内積と大きさの関係で覚える(作る)のがよい.

$\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$ より. $(\vec{p}\cdot\vec{q})^2 = |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2\cos^2\theta$

$0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1$ より, $|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 \geqq (\vec{p}\cdot\vec{q})^2$

等号成立条件は $\cos^2\theta = 1$, つまり. $\theta = 0, \pi$ より. $\vec{p}/\!/\vec{q}$ のときである.

C-Sの不等式は.「$|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 \geqq (\vec{p}\cdot\vec{q})^2$ (等号は. $\vec{p}/\!/\vec{q}$ のとき)」…(*)

$\boxed{n=3}$ $\vec{p}=(a,b,c)$, $\vec{q}=(x,y,z)$ とすると.

$|\vec{p}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $|\vec{q}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{p}\cdot\vec{q}=ax+by+cz$ より.

(*)から. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

(等号は. $a:b:c = x:y:z$ のとき)

$\boxed{\text{問題}}$ a, b, c, x, y, z は実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x+y+2z=1$ のとき、$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

(2) $x^2+y^2+z^2=1$ のとき、$x+2y+3z$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) コーシー・シュワルツの不等式より,

$(1^2+1^2+2^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+2z)^2$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2 \geqq \dfrac{1}{6}$ ($\because\ x+y+2z=1$)

等号成立条件は. $x:y:z = 1:1:2$ である。

よって. $x=k$, $y=k$, $z=2k$ とおくと. $x+y+2z=1$ より. $6k=1$ $\therefore k=\dfrac{1}{6}$

したがって, $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right)$ のとき, 最小値 $\dfrac{1}{6}$

(「能あるタカは爪を隠す」書き方)

$\vec{p}=(1,1,2)$, $\vec{q}=(x,y,z)$ とする.

$|\vec{p}||\vec{q}| \geqq \vec{p}\cdot\vec{q}$ より. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqq x+y+2z=1$

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ $\therefore\ x^2+y^2+z^2 \geqq \dfrac{1}{6}$

等号成立条件は. $\vec{p}$, $\vec{q}$ が同じ向きであることより.

$x=k$, $y=k$, $z=2k$ $(k>0)$ と表せる.

$x+y+2z=1$ より. $6k=1$ $\therefore k=\dfrac{1}{6}$

よって.

$x^2+y^2+z^2$ は.$(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right)$ のとき.最小値 $\dfrac{1}{6}$ をとる.

(2) (答えのみ) $(x,y,z)=\left(\dfrac{\sqrt{14}}{14},\dfrac{\sqrt{14}}{7},\dfrac{3\sqrt{14}}{14}\right)$ のとき、最大値 $\sqrt{14}$