H③ 12番(4)の解答

12 Oを原点とする座標平面上に

放物線 $C_1: y=x^2$

円 $C_2: x^2+(y-a)^2=1\ (a \geqq 0)$

がある。C_2 の点 $(0,\ a+1)$ における接線と C_1 が2点A, Bで交わり、△OABが C_2 に外接しているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を求めよ。

(2) 点 $(s,\ t)$ を $(-1,\ a)$, $(1,\ a)$, $(0,\ a-1)$ と異なる C_2 上の点とする。そして点 $(s,\ t)$ における C_2 の接線と C_1 との2つの交点を $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とする。このとき、$(\alpha-\beta)^2-\alpha^2\beta^2$ は $s,\ t$ によらない定数であることを示せ。

(3) (2)において、点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$ から C_2 への2つの接線がふたたび C_1 と交わる点を $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$, $\mathrm{R}(\gamma,\ \gamma^2)$ とする。$\beta+\gamma$ および $\beta\gamma$ を α を用いて表せ。

(4) (3)の2点Q, Rに対し、直線QRは C_2 と接することを示せ。

(1) $a=2$

(2) $a=2$ より、$C_2: x^2+(y-2)^2=1$

直線PQの方程式は、

$y=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)+\alpha^2$ より、$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

∴ $(\alpha+\beta)x-y-\alpha\beta=0$ …① (以下、略)

(3) $\beta+\gamma=\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$, $\beta\gamma=\dfrac{\alpha^2-3}{1-\alpha^2}$

(4) (方針) $d=r$ を示す

直線QRの方程式は、(2)の①の α を γ におきかえて、

$(\beta+\gamma)x-y-\beta\gamma=0$

(3)より、$\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}x-y-\dfrac{\alpha^2-3}{1-\alpha^2}=0$

∴ $2\alpha x+(\alpha^2-1)y-\alpha^2+3=0$

よって、円 C_2 の中心 $(0,2)$ と直線PQの距離は、

$$\frac{|2(\alpha^2-1)-\alpha^2+3|}{\sqrt{4\alpha^2+(\alpha^2-1)^2}}=\frac{|\alpha^2+1|}{\sqrt{(\alpha^2+1)^2}}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+1}=1$$

これは円 C_2 の半径と等しいので、直線QRは、円 C_2 に接する ▨