H③ ２番の別解

> 2
>
> (3) n は自然数とする。実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ をみたすとき、不等式
>
> $$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \geqq \frac{1}{n}$$
>
> が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(別解1) 数学的帰納法による解法

「$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1 \Longrightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2 \geqq \dfrac{1}{n}$

(等号成立は、$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$)」…(*) を数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、

$x_1=1$ のとき、$x_1^2=1$ より、(*) は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき、

x_1, x_2 などの使う文字はどうでもよくて、「kコの数の和が1のとき、kコの数の2乗の和が$\frac{1}{k}$以上」と解釈する

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k=1$ のとき、$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_k^2 \geqq \dfrac{1}{k}$

(等号成立は、$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_k=\dfrac{1}{k}$) が成り立つと仮定する。 A

$n=k+1$ のとき、

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}$ が $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}=1$ を

みたすとすると、$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k=1-x_{k+1}$ …① である。

(ア) $x_{k+1}=1$ のとき、

$x_1^2 \geqq 0, x_2^2 \geqq 0, x_3^2 \geqq 0, \ldots, x_k^2 \geqq 0$ から、

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_k^2+x_{k+1}^2 \geqq x_{k+1}^2=1>\frac{1}{k+1} \quad (\because k \geqq 1)$$

(イ) $x_{k+1} \neq 1$ のとき、

①より、
$$\frac{x_1}{1-x_{k+1}}+\frac{x_2}{1-x_{k+1}}+\frac{x_3}{1-x_{k+1}}+\cdots+\frac{x_k}{1-x_{k+1}}=1$$

よって、帰納法の仮定より、

kコの数の和が1のとき、kコの数の2乗の和が$\frac{1}{k}$以上

$$\left(\frac{x_1}{1-x_{k+1}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1-x_{k+1}}\right)^2+\left(\frac{x_3}{1-x_{k+1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_k}{1-x_{k+1}}\right)^2 \geqq \frac{1}{k}$$

ポ Aの x_1 と ここの x_1 は別物

$$\therefore\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_k^2 \geqq \frac{(1-x_{k+1})^2}{k}$$

よって、
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_k^2+x_{k+1}^2-\frac{1}{k+1}$$
$$\geqq \frac{(1-x_{k+1})^2}{k}+x_{k+1}^2-\frac{1}{k+1}$$
$$=\left(\frac{1}{k}+1\right)x_{k+1}^2-\frac{2}{k}x_{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{k+1}{k}x_{k+1}^2-\frac{2}{k}x_{k+1}+\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\frac{k+1}{k}\left(x_{k+1}^2-\frac{2}{k+1}x_{k+1}\right)+\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\frac{k+1}{k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)^2 \geqq 0$$

$$\therefore\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_k^2+x_{k+1}^2 \geqq \frac{1}{k+1}$$

また、等号成立条件は、

$$\frac{x_1}{1-x_{k+1}}=\frac{x_2}{1-x_{k+1}}=\frac{x_3}{1-x_{k+1}}=\cdots=\frac{x_k}{1-x_{k+1}}=\frac{1}{k} \text{ かつ } x_{k+1}=\frac{1}{k+1} \text{ より、}$$

$$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_{k+1}=\frac{1}{k+1} \text{ である。}$$

(ア),(イ)より、$n=k+1$ のとき、(*)は成り立つ。

したがって、

(i),(ii)より、すべての自然数nについて、(*)は成り立つ。□

(別解2) コーシー・シュワルツの不等式を利用する解法

コーシー・シュワルツの不等式より、

$$(1^2+1^2+1^2+\cdots+1^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2) \geqq (1\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3+\cdots+1\cdot x_n)^2$$

$$n(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2) \geqq 1^2 \quad (\because x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1)$$

$$\therefore\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2 \geqq \frac{1}{n}$$ □

等号成立条件は、$x_1:x_2:x_3:\cdots:x_n=1:1:1:\cdots:1$

かつ $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1$ より、

$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ である。