$\boxed{17}$ 実数 a に対し、xy 平面上の放物線 $C: y=(x-a)^2-2a^2+1$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) a がすべての実数を動くとき、C が通過する領域を求め、図示せよ。

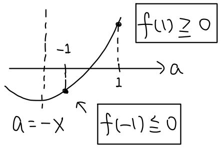
(2) a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき、C が通過する領域を求め、図示せよ。

(1)（途中）$a^2+2Xa-X^2+Y-1=0$ …(*)

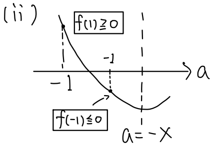
(2) 求める領域を F とする。
点 (X, Y) が F に属すための条件は、(1) の (*) をみたす実数 a が $-1\leqq a\leqq 1$ に存在することである。

$f(a)=a^2+2Xa-X^2+Y-1$ とおくと、
$f(a)=(a+X)^2-2X^2+Y-1$
ay 平面で、$y=f(a)$ の軸は、$a=-X$

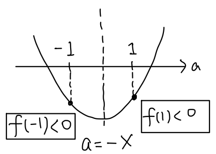
(i)



(ii)



(iii)



（$D\geqq 0$ の下で、$-1\leqq a\leqq 1$ に実数解をもたない）

$f(-1)=-X^2+Y-2X$, $f(1)=-X^2+Y+2X$

(i) $-X<-1$, つまり、$X>1$ のとき、
求める条件は、

$\begin{cases} f(-1)\leqq 0 \\ f(1)\geqq 0 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} Y\leqq X^2+2X \\ Y\geqq X^2-2X \end{cases}$

(ii) $1<-X$, つまり、$X<-1$ のとき、
求める条件は、

$\begin{cases} f(-1)\geqq 0 \\ f(1)\leqq 0 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} Y\geqq X^2+2X \\ Y\leqq X^2-2X \end{cases}$

(iii) $-1\leqq -X\leqq 1$, つまり、$-1\leqq X\leqq 1$ のとき、
求める条件は、$\underline{}$
$D\geqq 0 \wedge (f(-1)<0 \wedge f(1)<0)$ より、

(いから) $Y\leqq 2X^2+1 \wedge (f(-1)\geqq 0 \vee f(1)\geqq 0)$

よって、

$\begin{cases} Y\leqq 2X^2+1 \\ Y\geqq X^2+2X \end{cases}$ または $\begin{cases} Y\leqq 2X^2+1 \\ Y\geqq X^2-2X \end{cases}$

(i), (ii), (iii) より、求める領域は、

$$\begin{cases} x^2+2x\leqq y\leqq x^2-2x & (x<-1) \\ x^2-2x\leqq y\leqq 2x^2+1 \\ \vee\ x^2+2x\leqq y\leqq 2x^2+1 & (-1\leqq x\leqq 1) \\ x^2-2x\leqq y\leqq x^2+2x & (1<x) \end{cases}$$

であり、右図の斜線部（境界を含む）。