20 三角形OABがあり、$0 < p < 1,\ 0 < q < 1$ として、辺OAを $p:(1-p)$ に内分する点をC、辺OBを $q:(1-q)$ に内分する点をDとする。線分ADと線分BCの交点をE、線分AB, OE, CDの中点をそれぞれF, G, Hとする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OE}$ を、$p,\ q,\ \vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 3点F, G, Hは一直線上にあることを示せ。

(3) $OA = 2,\ OB = 3,\ \angle AOB = \frac{2}{3}\pi$ に対して

$GF : GH = 7 : 2,\ AB \perp GF$

となるとき、p と q の値を求めよ。

(方針) (1) (方法1) 2通りで表して、係数比較

(方法2) メネラウスの定理を利用

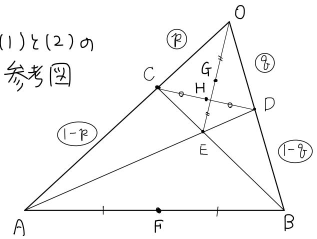
(2) $\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FH}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表し、

$\overrightarrow{FH} = k\overrightarrow{FG}$ をみたす実数 k が存在することを示す。

注 証明なので、$\overrightarrow{FH} = k\overrightarrow{FG}$ が成り立つ前提で書かないように!!

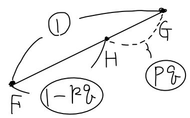
(3) $GF : FH = 7 : 2$, $AB \perp GF$ を利用して p, q がみたす関係式を2式作り、p, q の連立方程式を解く。

(1)と(2)の参考図



(3)の参考図

$\overrightarrow{FH} = (1-pq)\overrightarrow{FG}$



解答 (1) EはAD上より

$\overrightarrow{OE} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD} = (1-s)\vec{a} + qs\vec{b}$ と表せる。

また、EはBC上より、

$\overrightarrow{OE} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} = pt\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ と表せる。

$\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立より、$1-s = pt$, $qs = 1-t$

$\therefore s = \dfrac{1-p}{1-pq},\ t = \dfrac{1-q}{1-pq}$ $(\because 0<p<1,\ 0<q<1)$

よって、$\overrightarrow{OE} = \dfrac{p(1-q)}{1-pq}\vec{a} + \dfrac{q(1-p)}{1-pq}\vec{b}$ //

(2) $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{p(1-q)}{1-pq}\vec{a} + \dfrac{q(1-p)}{1-pq}\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(p\vec{a} + q\vec{b})$

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{p(1-q)}{1-pq} - 1\right)\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{q(1-p)}{1-pq} - 1\right)\vec{b}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{1-pq}\vec{a} + \frac{q-1}{1-pq}\vec{b}\right)\end{aligned}$$

また、

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left((p-1)\vec{a} + (q-1)\vec{b}\right)$

したがって、

$\overrightarrow{FH} = (1-pq)\overrightarrow{FG}$ $(0<pq<1)$ …① より、3点F, G, Hは一直線上にある。

(3) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2\cos\frac{2}{3}\pi = -3$

(2)の①より、$GF : GH = 1 : pq = 7 : 2$ $\therefore 7pq = 2$ …②

また、$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{GF}$ より、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GF} = 0$

よって、

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left\{\frac{1-p}{2(1-pq)}\vec{a} + \frac{1-q}{2(1-pq)}\vec{b}\right\} = 0$$

$$(1-p)(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2) + (1-q)(|\vec{b}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b}) = 0$$

$$-7(1-p) + 12(1-q) = 0$$

$$\therefore 7p - 12q = -5 \quad \cdots ③$$

②, ③より、p を消去して整理すると、

$(3q-2)(4q+1) = 0$

$0<q<1$ より、$q = \dfrac{2}{3}$

よって、②より、$p = \dfrac{3}{7}$

以上より、$p = \dfrac{3}{7},\ q = \dfrac{2}{3}$ //